

3. DOMAČA NALOGA

Oddaja rešitev nalog v dogovoru s tutorji v tednu od ponedeljka **10. 1. 22** dalje.

1. (10) Naj bosta $y_1(x) = e^x$ in $y_2(x) = x^2 + 1 + e^x$ rešitvi diferencialne enačbe

$$a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

kjer so a, b, c zvezne funkcije na $\mathbb{R}$ in funkcija a nima ničel. Poiščite tisto rešitev te diferencialne enačbe, katere graf gre skozi točko $(1, 3e)$.

R: Enačba je linearna. Torej je $y_s = y_p + y_h$. Pri tem je $y_h = C(y_2 - y_1) = C(x^2 + 1)$ ter je lahko $y_p = y_1 = e^x$. Začetni pogoj $y(1) = 3e = e + 2C$ nam da $y(x) = e^x + e(x^2 + 1)$.

2. (10) Rešite

$$y' = \frac{(1 + e^x - e^{-x})y^2 - (e^x + xe^x + e^{-x} - xe^{-x})y + 1}{3y^2 - 2(x + e^x + e^{-x})y + (xe^x + xe^{-x} + 1)}.$$

R: To je enačba oblike $Pdx + Qdy = 0$, kjer sta

$$P = (1 + e^x - e^{-x})y^2 - (e^x + xe^x + e^{-x} - xe^{-x})y + 1$$

$$Q = -3y^2 + 2(x + e^x + e^{-x})y - (xe^x + xe^{-x} + 1)$$

Ker velja $P_y = 2(1 + e^x - e^{-x})y - (e^x + xe^x + e^{-x} - xe^{-x}) = Q_x$ je to diferencial prvega integrala u . Po integriranju P po x dobimo

$$u = (x + e^x + e^{-x})y^2 - (xe^x + xe^{-x})y + x + A(y).$$

Odvod po y in primerjava s Q da

$$A' = -3y^2 - 1$$

Tako je $u(x, y) = -y^3 + (x + e^x + e^{-x})y^2 - (xe^x + xe^{-x} + 1)y + x$ prvi integral dane DE.

3. (10) V prvi posodi je 10l vode, v kateri je raztopljeno 10g soli, v drugi posodi pa je 5l vode, v kateri je tudi raztopljeno 10g soli. Obe posodi imata mešalec. V prvo posodo začne ob času $t = 0$ pritekati solna raztopina s koncentracijo 2 g/l. Vsako sekundo priteče 1 dl raztopine. Istočasno iz prve posode izteka

1dl/s raztopine v drugo posodo ter nato iz druge posode nova raztopina s hitrostjo 1dl/s v kanalizacijo. Kolikšna je količina soli v drugi posodi po eni minuti?

R: Enačba za prvo posodo: $y(t)$ količina soli v prvi posodi ob času t . $y(0) = 10g$. Hitrost spreminjanja količine soli v prvi posodi je podana z enačbo

$$\dot{y} = 2g/l \cdot 0,1l/s - \frac{y}{10}g/l \cdot 0,1l/s = 0,2 - \frac{y}{100},$$

katere rešitev je $y(t) = 20 - 10e^{-\frac{t}{100}}$.

Enačba za drugo posodo: $z(t)$ količina soli v drugi posodi ob času t . $z(0) = 10g$. Hitrost spreminjanja količine soli v drugi posodi

$$\dot{z} = \frac{y}{100} - \frac{z}{50} = \frac{2}{10} - \frac{1}{10}e^{-\frac{t}{100}} - \frac{z}{50}.$$

Rešitev je

$$z(t) = 10(1 - e^{-\frac{t}{100}} + e^{-\frac{t}{50}}).$$

Po eni minuti imamo gramov soli v drugi posodi:

$$10(1 - e^{-\frac{6}{10}} + e^{-\frac{6}{5}}) \approx 7,52$$

4. (10) Poiščite tisto rešitev sistema

$$x'' = 2x + y \quad y'' = x + 2y$$

za katero velja $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$ in $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Pomoč:

i) Splošna rešitev enačbe $x' = ax$ je $x(t) = Ce^{at}$.

ii) Splošna rešitev sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ je $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{c} = Pe^{Jt}\vec{d}$.

iii) Za $a > 0$ je splošna rešitev enačbe $x'' = ax$ oblike $x(t) = Ce^{\sqrt{a}t} + De^{-\sqrt{a}t}$.

iv) Splošna rešitev sistema $\vec{x}'' = A\vec{x}$ je ...

R: Lastni vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sta 1 in 3. Pripadajoča lastna vektorja sta $\vec{v}_1 = (1, -1)$ ter $\vec{v}_2 = (1, 1)$. Potem je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Splošna rešitev sistema je oblike $e^{\sqrt{A}t}\vec{c} + e^{-\sqrt{A}t}\vec{d}$ oziroma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{3}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{3}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}.$$

Od tod

$$x(t) = Ce^t + De^{\sqrt{3}t} + Ee^{-t} + Fe^{-\sqrt{3}t}$$

in

$$y(t) = -Ce^t + De^{\sqrt{3}t} - Ee^{-t} + Fe^{-\sqrt{3}t}.$$

Upoštevajoč začetne pogoje, dobimo

$$C + D + E + F = 0, \quad -C + D - E + F = 0$$

$$C + \sqrt{3}D - E - \sqrt{3}F = 2, \quad -C + \sqrt{3}D + E - \sqrt{3}F = 0$$

Od tod $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $E = -\frac{1}{2}$, $F = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

5. (10) Množico realnih števil opremimo z dvema metrikama: standardno metriko $d_2(x, y) = |x - y|$ ter diskretno metriko

$$d_{\text{disk}}(x, y) = 1, \text{ če } x \neq y$$

in

$$d_{\text{disk}}(x, y) = 0, \text{ če } x = y.$$

Poiščite vse zvezne preslikave iz $(\mathbb{R}, d_2)$ v $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ ter vse zvezne preslikave iz $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ v $(\mathbb{R}, d_2)$.

R: Vse preslikave iz $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ v $(\mathbb{R}, d_2)$ so zvezne, saj so vse podmnožice $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ odprte in je torej praslika vsake odprte množice v $(\mathbb{R}, d_2)$ odprta v $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$.

Naj bo $f : (\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ zvezna. Torej je praslika vsake podmnožice $\mathbb{R}$ odprta podmnožica v $(\mathbb{R}, d_2)$. Konstantne preslikave so nedvomno zvezne, saj je vsaka praslika ali prazna množica ali $\mathbb{R}$. Pokažimo, da drugih zveznih preslikav $f : (\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ ni.

Naj bo točka $b \in \mathbb{R}$ v sliki preslikave f . Torej obstaja $a \in \mathbb{R}$, da je $f(a) = b$. Naj bo $\varepsilon = 1$. Ker je f zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da

$$f((a - \delta, a + \delta)) \subset K(b, 1) = \{b\}.$$

Torej je f na okolici a konstantno enaka b .

Naj bo

$$A = \{x > a; f(x) = b \text{ na } [a, x]\}.$$

Po prejšnjem A ni prazna množica ($a + \frac{\delta}{2} \in A$). Denimo, da je A navzgor omejena. Potem ima supremum α . Na enak način kot prej ugotovimo, da je f konstantna v okolici α . Torej je $f(\alpha) = b$ in to velja tudi za nekoliko večje $x > \alpha$. Torej A ni navzgor omejena in $f(x) = b$ za vsak $x \geq a$. Na podoben način sklepamo, da je $f(x) = b$ za vse $x \leq a$. Pri tem opazujemo množico

$$A' = \{x < a; f(x) = b \text{ na } [x, a]\}$$

in ugotovimo, da ni navzdol omejena.

Pojma povezanosti nismo formalno definirali. Sicer bi lahko argumentirali tudi takole. Naj bo

$$B = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = b\} = f^{-1}(\{b\}).$$

Množica B je odprta in zaprta hkrati v $(\mathbb{R}, d_2)$ (f zvezna, $\{b\}$ je odprta in zaprta v $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$). Ker je neprazna, je, upoštevajoč povezanost v metriki d_2 , enaka $\mathbb{R}$.