

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [20 točk]

Naj bo $a > 0$. Podano je iteracijsko zaporedje

$$x_{r+1} = \alpha x_r (1 - \beta a x_r^2), \quad r = 0, 1, \dots$$

- Določite parametra α in β tako, da bo za začetni približek dovolj blizu $\frac{1}{\sqrt{a}}$ veljalo $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = \frac{1}{\sqrt{a}}$ in da bo red konvergence vsaj kvadratičen.
- Kolikšen je red konvergence izpeljane metode?
- Naj bo $a = 2$. Z izpeljano metodo in začetnim približkom $x_0 = \frac{1}{2}$ želimo določiti $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ali bo metoda konvergirala? Odgovor utemeljite z računom.

Rešitev.

- Naj bo $g(x) = \alpha x (1 - \beta a x^2)$. Iz danih pogojev dobimo 2 enačbi,

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{in} \quad g'\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 0,$$

oz.

$$\alpha(1 - \beta) = 1 \quad \text{in} \quad \alpha(1 - 3\beta) = 0.$$

Rešimo sistem enačb in dobimo

$$\alpha = \frac{3}{2} \quad \text{in} \quad \beta = \frac{1}{3}.$$

Iteracijska funkcija g je torej

$$g(x) = \frac{3}{2}x \left(1 - \frac{1}{3}ax^2\right).$$

- Velja $g''\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = -3\sqrt{a} \neq 0$, torej je red konvergence kvadratičen.
- Imamo iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{3}{2}x \left(1 - \frac{2}{3}x^2\right) = \frac{3}{2}x - x^3$ in začetni približek $x_0 = \frac{1}{2}$. Da bo metoda konvergirala, mora veljati

$$|g'(x_0)| < 1.$$

Velja

$$|g'(x_0)| = \frac{3}{4} < 1,$$

torej bo metoda konvergirala.

Opomba: Graf funkcije g je enostavno narisati in z grafa odčitati, da je začetni približek x_0 dober. Za vse točke to ni dovolj, potrebno je še utemeljiti z zgornjim računom.

Naloga 2 [20 točk]

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{bmatrix}, \quad 0 < a < 1.$$

- a) Izračunajte LU razcep $PA = LU$ matrike A z delnim pivotiranjem.
- b) Kako moramo izbrati a , da bo veljalo $\|U\|_F = \frac{9}{4}$?
- c) Za matriko A izvedemo še LU razcep $PAQ = LU$ s kompletnim pivotiranjem. Glede na vrednost parametra a določite determinanto matrike P .

Rešitev.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1+a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1+a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & a & -a-a^2 \end{bmatrix}.$$

Matrike L , U in P so

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & -a-a^2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Velja $\|U\|_F = \sqrt{a^2 + 1 + 1 + (1+a)^2 + (-a-a^2)^2}$. Dobimo enačbo:

$$a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 3 = \frac{81}{16},$$

oz.

$$16a^4 + 32a^3 + 48a^2 + 32a - 33 = 0.$$

Realni rešitvi te enačbe sta $a = \frac{1}{2}$ in $a = -\frac{3}{2}$. Pravilni odgovor je $a = \frac{1}{2}$, saj $a = -\frac{3}{2}$ ne ustreza $0 < a < 1$!

- c) Prvi pivot je $1+a$, ki ga z menjavo prve in zadnje vrstice ter prvega in zadnega stolpca spravimo na mesto $(1,1)$ ter izvedemo eliminacije v prvem stolpcu:

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 0 \\ \frac{1}{1+a} & \frac{-1}{1+a} & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Zdaj ločimo dva primera glede na vrednost parametra a :

1. $\frac{1}{1+a} < a$ oz. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < 1$: zamenjati moramo drugo in tretjo vrstico, torej imamo skupaj dve menjavi vrstic, determinanta matrike P bo tako enaka 1.
2. $\frac{1}{1+a} \geq a$ oz. $0 < a \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$: menjava ni več potrebna, torej imamo skupaj eno menjavo vrstic, determinanta matrike P bo tako enaka -1 .

Druga možnost je, da v primeru $\frac{1}{1+a} < a$ zamenjamo drugi in tretji stolpec. V tem primeru je determinanta matrike P enaka -1 .

Naloga 3 [20 točk]

Z uporabo Householderjevih zrcaljenj rešite sistem enačb

$$2x + 7y = 2, \quad -2x + 5y = 4, \quad 2x + 7y = 4 \quad \text{in} \quad -2x + 5y = 0$$

po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Zapišemo matriko A in vektor $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 5 \\ 2 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in rešujemo predoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{x} = [x \ y]^T$.

1. Izračunamo $\mathbf{w} = [6, -2, 2, 2]^T$ in $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 48$ ter sledimo formuli

$$P_1 \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{2}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{x} \mathbf{w}.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{48} \cdot 24 \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ P_1 \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{2}{48} \cdot 36 \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \\ P_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{48} \cdot 12 \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Izračunamo $\mathbf{w} = [20, 4, 8]^T$ in $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 480$ ter dobimo:

$$\begin{aligned} P_2 \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ P_2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rešimo

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -12 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

in dobimo $x = \frac{1}{24}$ in $y = \frac{5}{12}$.

Naloga 4 [20 točk]

Podana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Sled matrike $A^T A$ želimo izračunati na dva načina.

- Direktno.* Zapišite ekonomičen postopek za direktni izračun sledi matrike $A^T A$ in preštejte število operacij.
- S pomočjo QR razcepa.* Denimo, da poznamo QR razcep za matriko A , torej $A = QR$. Zapišite ekonomičen postopek za izračun sledi matrike $A^T A$ in preštejte število operacij.
- Kdaj je postopek iz točke a) učinkovitejši od postopka iz točke b)?

Rešitev.

- Izračunati moramo diagonalne elemente matrike $A^T A$ in jih sešteti. Element na k -tem mestu diagonale matrike $A^T A$ dobimo tako, da izračunamo sklarni produkt $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k$, kjer $\mathbf{a}_k$ predstavlja k -ti stolpec matrike A . Stolpci matrike A so vektorji dolžine m , zato za izračun enega diagonalnega elementa potrebujemo $2m - 1$ operacij, za izračun vseh diagonalnih elementov pa $n(2m - 1)$. Dobljene elemente moramo še sešteti, to pa je $n - 1$ operacij. Skupaj torej

$$n(2m - 1) + n - 1 = 2nm - n + n - 1 = 2mn - 1.$$

- Poznamo QR razcep matrike A , torej lahko zapišemo

$$A^T A = (QR)^T (QR) = R^T Q^T QR = R^T R.$$

Sled matrike $A^T A$ je tako enaka sledi matrike $R^T R$. Za izračun diagonalnih elementov matrike $R^T R$ potrebujemo

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

operacij, kjer upoštevamo, da je R zgornje trikotna. Diagonalne elemente še seštejemo, kar je $n - 1$ operacij. Skupaj torej $n^2 + n - 1$.

- Da bi bil postopek iz točke a) učinkovitejši, bi moralo veljati

$$2mn - 1 < n^2 + n - 1,$$

kar se poenostavi v

$$m < \frac{n + 1}{2}.$$

Posotpek iz točke a) ni tako nikoli učinkovitejši, saj velja $m \geq n$, za dobljeni pogoj pa bi moralo veljati $m < n$.