

Analiza 1: 2. kolokvij

Rešitve

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

P Funkcija f je definirana in zvezna na intervalih $[0, 1]$ in $[1, 2]$. Potem je tudi enakomerno zvezna na intervalu $[0, 2]$.

N Če je $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, obstaja $x > 2022$, da je $f(x) < -2022$.

P Funkcija $x \mapsto \operatorname{ch}^2 x$ je injektivna na intervalu $[0, \infty)$.

N Če velja $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = 0$, je f zvezna v točki 1.

P Cauchyjev produkt dveh konvergentnih vrst s pozitivnimi členi je konvergenten.

N Naj bo $f(x) = e^x$. Obstaja funkcija $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da je $f \circ g(x) = x$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

P Vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ je neodvisna od vrstnega reda seštevanja.

N Naj bo f nezvezna v točki 1. Potem za vsako zaporedje (a_n) z lastnostjo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(1)$.

N Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta s pozitivnimi členi. Potem velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

N Vrsta je konvergentna natanko tedaj, ko zaporedje njenih delnih vsot konvergira k nič.

2. naloga (15 točk)

V odvisnosti od parametra $a > 0$ obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{((2n+5)!!)^2}.$$

Kako je s konvergenco za $a = -3$?

Rešitev: Uporabimo kvocientni kriterij

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 a}{(2n+7)^2} = \frac{a}{4} < 1$$

Vrsta je konvergentna za $a < 4$ in divergentna za $a > 4$. Pri $a = 4$ kriterij odpove, zato uporabimo Raabejevega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^2 + 45n}{4n^2 + 8n + 4} = 5 > 1.$$

Ugotovimo, da je vrsta konvergentna za $a = 4$. Iz zgoraj zapisanega sledi tudi, da je vrsta absolutno konvergentna za $a = -3$.

Točkovnik

- +5 Obravnava konvergence za $a > 0$ in $a \neq 4$.
- +5 Obravnava konvergence za $a = 4$.
- +5 Obravnava konvergence za $a = -3$.

3. naloga (15 točk)

Podan je predpis

$$f(x) = \begin{cases} a \arccos \frac{2x+\pi}{2x-5\pi}; & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2x-b}{x-\pi} \tan x; & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ cx; & x \geq \pi. \end{cases}$$

Dokaži, da je z njim definirana funkcija na $\mathbb{R}$. Določi taka števila $a, b, c \in \mathbb{R}$, da bo f zvezna funkcija.

Rešitev: Za definiranost funkcije f je potrebno premisliti zgolj, da za $x \leq \frac{\pi}{2}$ velja

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{2x+\pi}{2x-5\pi} < 1,$$

To storimo tako, da skiciramo graf ulomljene linearne funkcije ali utemeljimo, da gre za padajočo funkcijo z vodoravno asimptoto pri $y = 1$. Ker to drži, lahko ta argument vstavimo v krožno funkcijo $\arccos$, drugih težav v predpisu pa nimamo.

Sedaj zagotovimo zveznost v točkah $\frac{\pi}{2}$ in π . Velja:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} f(x) = a \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi a}{3}, \quad f(\pi) = \lim_{x \searrow \pi} f(x) = c\pi.$$

Nadalje opazimo, da mora biti $b = \pi$, saj sicer zaradi neomejenosti funkcije tangens v $x = \frac{\pi}{2}$, naslednja limita ne obstaja:

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-b}{x-\pi} \tan x.$$

Za $b = \pi$ to limito izračunamo z vpeljavo neznanke $t = x - \frac{\pi}{2}$. Dobimo

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{2t}{t + \frac{\pi}{2}} \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\lim_{t \searrow 0} \frac{2t}{t + \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} t = -\lim_{t \searrow 0} \frac{2t \cos t}{\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin t} = \frac{4}{\pi}.$$

Nazadnje vpeljemo $t = x - \pi$ in izračunamo

$$\lim_{x \nearrow \pi} f(x) = \lim_{x \nearrow \pi} \frac{2x-\pi}{x-\pi} \tan x = \lim_{t \nearrow 0} \frac{2t+\pi}{t} \tan(t+\pi) = \lim_{t \nearrow 0} \frac{(2t+\pi) \sin t}{t \cos t} = \pi.$$

Od tod sledi, da morata biti $a = 6/\pi^2$ in $c = 1$.

Točkovnik

+5 Definiranost f na $\mathbb{R}$.

+2 Funkcijski vrednosti $f(\pi)$ in $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

+2 Določitev parametra b .

+6 Določitev parametrov a in c oz. limit $x \searrow \frac{\pi}{2}$ in $x \nearrow \pi$.

4. naloga (20 točk)

Zaporedje (a_n) je podano s členom $a_1 = \frac{3}{2}$ in zvezo

$$a_{n+1} = \left(a_1 + a_2 + \dots + a_n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Dokaži, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna in jo seštej. Ali ta vrsta konvergira tudi, če je $a_1 = 3$? Namig: Poišči rekurzivno zvezo za zaporedje delnih vsot.

Rešitev: Upoštevamo namig in ugotovimo, da za zaporedje delnih vsot (S_n) zadošča zvezi

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + \left(S_n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = S_n^2 - 2S_n + 2.$$

Tovrstna zaporedja lahko obravnavamo grafično kot prikazuje spodnja slika. Od tod izpeljemo sklepa, ki ju dokažemo z indukcijo: če je $S_1 \in (1, 2)$, je zaporedje strogo padajoče in navzdol omejeno z 1; če je $S_1 > 2$ je zaporedje strogo naraščajoče. Ker sta edini možni limiti 1 in 2, velja, da pri $S_1 = a_1 = \frac{3}{2}$ zaporedje monotono pada k $S = 1$, pri $S_1 = a_1 = 3$ pa divergira.

Opomba: Divergenco vrste za $a_1 = 3$ ste nekateri pokazali tudi direktno. Na primer s sklepom, da iz $S_n \geq 3$ sledi, da je $a_{n+1} \geq 2$. Še bolj zanimive pa so bile rešitve, v katerih ste nekateri z indukcijo dokazali, da velja:

$$a_1 = \frac{3}{2} \implies S_n = \frac{2^{2^{n-1}} + 1}{2^{2^{n-1}}},$$

$$a_1 = 3 \implies S_n = 2^{2^{n-1}} + 1.$$

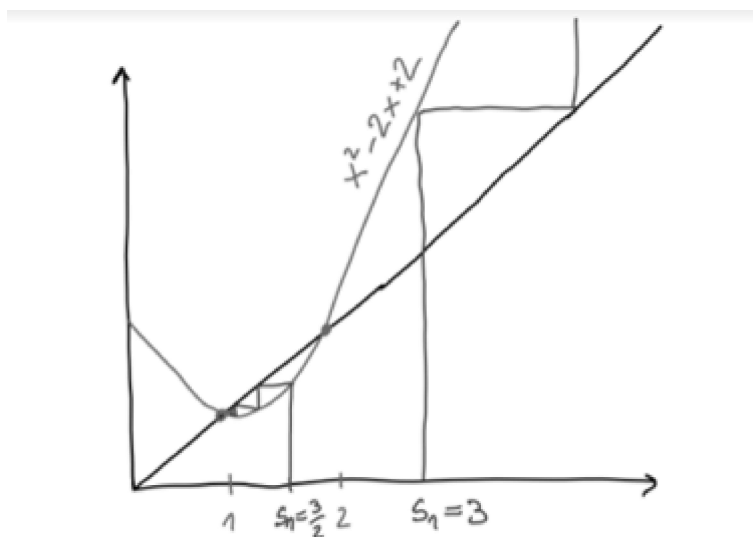
Od tod oba zgornja rezultata sledita direktno.

Točkovnik

+5 Izpeljava rekurzivne zveze.

+10 Obravnava konvergence za $a_1 = \frac{3}{2}$.

+5 Obravnava konvergence za $a_1 = 3$.



5. naloga (20 točk)

Številu $x \in [0, 1)$ priredimo decimalni zapis $0.x_1x_2x_3\ldots$ brez ponavljajočih se devetic. Število ničel v decimalnem zapisu števila x označimo z

$$n(x) := |\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 0\}| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

Naj bo funkcija $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n(x)}; & \text{če je } n(x) \text{ končno,} \\ 0; & \text{če je } n(x) \text{ neskončno.} \end{cases}$$

a) Dokaži, da je f zvezna v točki $x = 0$.

b) Poišči kako točko $x > 0$, v kateri je f nezvezna, in to dokaži.

c) Poišči kako točko $x > 0$, v kateri je f zvezna, in to dokaži.

Rešitev: Izberimo $\epsilon > 0$ in naj bo $\delta \leq 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Potem za $x < \delta$ velja, da je $n(x) \geq n$, saj ima tako število prvih n decimalk enakih 0. Torej je $f(x) \leq 2^{-n}$. Če zelimo, da je $f(x) < \epsilon$ za vse $x < \delta$ moramo torej vzeti $\delta \leq 10^{-\log_2 \epsilon}$.

Za izbor točke, v kateri je f nezvezna imamo dve možnosti. Naj bo $a > 0$ poljubno število, katerega je $n(a) \in \mathbb{N}_0$ in $f(a) > 0$ (t.j. njegov decimalni zapis je neskončen, ničla pa se v njem pojavi končno mnogokrat). Naj bo (a_m) zaporedje približkov za a na m decimalk, $m \in \mathbb{N}$. Tedaj velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = a \quad \text{in} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f(a_m) = 0 \neq f(a).$$

Torej f ni zvezna v a .

Druga možnost za nezvezno točko je $a > 0$ s končnim decimalnim zapisom. Res, naj bo $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$ in decimalni zapis števila a oblike

$$a = 0.a_1a_2\ldots a_k.$$

Potem lahko konstruiramo zaporedje

$$a_m = 0.a_1a_2\ldots a_k99\ldots 988\ldots,$$

ki ima v decimalnem zapisu $m \in \mathbb{N}$ devetic in neskončno mnogo osmic. Zanj velja, da $a_m \rightarrow a$ in da je $n(a_m) = c \in \mathbb{N}_0$ za vse $m \in \mathbb{N}$. Torej imamo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(a_m) = 2^{-c} \neq 0 = f(a).$$

Naj dodam, da je ta primer točke $a > 0$ zelo poseben, saj se nezveznost zgodi le na levi (t.j. $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$), zato sem nekaj točk dodelil tudi tistim, ki ste ga hoteli navesti in dokazati kot primer za točko c).

Nazadnje trdimo, da je f zvezna v vsakem številu $a > 0$, katerega decimalni zapis je neskončen in vsebuje neskončno mnogo ničel. Res, za tako število velja $f(a) = 0$. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ tak, da je $a_k \neq 0$ (cifra na njegovem k -tem decimalnem mestu). Če izberemo $\delta < 10^{-(k+1)}$, bo imelo število $x \in [0, 1)$ z lastnostjo $|x - a| < \delta$ prvih $k - 1$ decimalk enakih kot a , ter k -to decimalko spremenjeno za največ 1. To pomeni, da bo imelo število x vsaj toliko ničel kot jih ima a na prvih $k - 1$ mestih. Ker ima a v svojem zapisu neskončno mnogo ničel, za poljuben $\epsilon > 0$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da za $|x - a| < \delta < 10^{-(k+1)}$ sledi, da je $f(x) < \epsilon$.

Opomba: V točkah b) in c) je bilo dovolj poiskati le kak primer števila, v katerem je f zvezna oz. nezvezna. Na primer $a = 0.5$ ali $a = 0.\overline{3}$ za b) in $a = 0.\overline{01}$ za c).

Točkovnik

+6 Dokaz za $x = 0$.

+7 Točka b).

+7 Točka c).

6. naloga (10 točk)

Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in periodična (t.j. obstaja $a > 0$, da velja $f(x+a) = f(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$). Dokaži, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x}) = 0.$$

Namig: Ali je f enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$?

Rešitev: Ker je funkcija f zvezna na $[-a, a]$ je tam tudi enakomerno zvezna. To pomeni, da za $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za $x, y \in [-a, a]$ z lastnostjo $|x - y| < \delta$ velja $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Pri tem lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\delta < a$. Ker smo vzeli interval z dvojno periodo, za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ z lastnostjo $|x - y| < \delta$ obstaja $m \in \mathbb{Z}$, da sta števili $x + ma$ in $y + ma$ elementa intervala $[-a, a]$. Torej velja tudi $|(x + ma) - (y + ma)| < \delta$ in posledično

$$|f(x) - f(y)| = |f(x + ma) - f(y + ma)| < \epsilon.$$

Torej je f enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$.

Naj bo sedaj $\epsilon > 0$. Vemo, da obstaja $\delta > 0$, da velja sklep

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \delta \implies |f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x})| < \epsilon.$$

Ker velja tudi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0,$$

obstaja $M > 0$, da za vsak $x \geq M$ velja $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \delta$. Torej za $x \geq M$ velja

$$|f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x})| < \epsilon,$$

kar ustreza definiciji ničelne limite za $x \rightarrow \infty$.

Opomba: Nekateri ste želeli argumentirati, da je f enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$, ker je zvezna in omejena na $\mathbb{R}$. To v splošnem ne drži, protiprimer je $f(x) = \sin(x^2)$. Pogosto ste komentirali tudi, da lahko za $\epsilon > 0$ na $\mathbb{R}$ vzamemo isti $\delta > 0$ kot na $[0, a]$. Tudi to v splošnem ni res, saj je na $\mathbb{R}$ treba upoštevati tudi primer, ko sta blizu $x \in [(m-1)a, ma]$ in $y \in [ma, (m+1)a]$ za nek $m \in \mathbb{Z}$ (t.j. treba je vzeti interval z dvojno periodo). Tudi argument, da enakomerna konvergenca na nedisjunktnih intervalih $[ma, (m+1)a]$ porodi enakomerno konvergenco na njihovi uniji v tem primeru ni povsem zadosten, saj ste na vajah to potrdili le za končno unijo intervalov. Kakorkoli, najbolj neustrezen pa je bil razmislek, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x}) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(\sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(\sqrt{x}).$$

To bi bilo res le, če bi vedeli, da obe limiti na desni obstajata.

Točkovnik

+5 Enakomerna zveznost.

+5 Dokaz, da je limita ničelna.