

Analiza 3: 1. izpit

24.1.2021

Naloga 1 (25 točk). Poišči splošno rešitev enačbe

$$y' \sin y' + \cos y' - y = 0.$$

Ali ima dobljena družina krivulj ogrinjačo? Če jo ima, jo poišči.

Naloga 2 (25 točk). Podan je sistem enačb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \sin(xy) - y = f(x, y) \\ \dot{y} &= x + \frac{y}{1 + y^2} = g(x, y).\end{aligned}$$

- a) (5 točk) Dokaži, da za poljuben začetni pogoj $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ obstaja enolično določena rešitev sistema enačb.
- b) (10 točk) Poišči funkcijo Ljapunova za polje $V(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ oblike $u = ax^2 + bxy + cy^2$. Rezultat utemelji! Kaj lahko sklepaš o completeness polja V ?
- c) (10 točk) Sistem lineariziraj v okolici izhodišča in poišči rešitev lineariziranega sistema. Z drugimi besedami, poišči takšno matriko A s konstantnimi komponentami, da bo veljalo

$$V(x, y) = A \cdot (x, y)^\top + \eta(x, y), \quad \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} \frac{\eta(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Nato poišči rešitev sistema $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A \cdot (x, y)^\top$.

Naloga 3 (25 točk). Poišči splošno rešitev enačbe

$$\frac{3y''}{x} - \frac{2y'}{x^2} + \frac{2y}{x^3} = 1.$$

Naloga 4 (25 točk). Poišči ekstremale funkcionala

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$$

med vsemi $\mathcal{C}^2$ -funkcijami y na intervalu $[a, b]$, ki zadoščajo

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}, \quad \int_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1 - 3e^{-2}}{4}$$