1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Kompleksna analiza: 1. izpit

31. 1. 2022

Čas pisanja je 180 minut. Možno je doseči 60 točk. Veliko uspeha!

Sedež (2.02)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (10 točk)

a) (3 točke) Zapiši definicijo holomorfno konveksne ogrinjače podmnožice $K \subset \mathbb{C}$.

b) (3 točke) Zapiši definicijo Rungejevega para (Ω, Ω_0), kjer sta $\Omega \subset \Omega_0$ podmnožici v $\mathbb{C}$.

c) (4 točke) Določi, ali sta para domen Rungejeva ali ne. Utemelji! ($A(z; r, R)$ označuje množico $A(z; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z| < R\}$)

   i) $(A(0; 1/4, 4), \mathbb{D}(0, 10))$

   ii) $(A(0; 1/4, 4), A(0; 1/8, 8))$

2. naloga (14 točk)

a) (3 točke) Zapiši Mittag-Lefflerjev izrek.

b) (4 točke) Utemelji, da predpis

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

podaja meromorfno funkcijo na $\mathbb{C}$.

c) (7 točk) Pokaži, da velja

$$\frac{1}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{\pi^2} f(z).$$

Namig: pokaži, da je razlika zgornjih količin omejena!

3. naloga (8 točk)

a) (3 točke) Zapiši Riemannov upodobitveni izrek.

b) (5 točk) Naj bo Ω omejena, povezana in enostavno povezana domena v $\mathbb{C}$. Naj bo $p \in \Omega$ in naj bosta ϕ_i, $i = 1, 2$ biholomorfni preslikavi $\phi_i : \Omega \to \mathbb{D}$. Recimo, da velja

$$\phi_1(p) = \phi_2(p) \quad \text{in} \quad \arg \phi_1'(p) = \arg \phi_2'(p).$$

Dokaži, da tedaj velja $\phi_1 \equiv \phi_2$.

4. naloga (14 točk)

a) (3 točke) Zapiši definicijo normalne družine holomorfnih funkcij na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$.

b) (3 točke) Zapiši Montelov izrek.

c) (6 točke) Podana je družina funkcij $f_c : \Omega \to \mathbb{C}$ za $c \geq 0$, s predpisom $f_c(z) = e^{cz}$. Poišči maksimalno domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$, na kateri je družina $\{f_c\}_{c\geq 0}$ normalna. Rezultat utemelji!

d) (2 točki) Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ domena in $\mathcal{F}$ družina holomorfnih funkcij na Ω, ki ni normalna. Pokaži, da tedaj obstaja $z_0 \in \Omega$, tako da $\mathcal{F}$ ni normalna na nobeni okolici točke z_0.

5. naloga (14 točk)

Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, ki je obrnljiva na neki okolici točke $z_0 \in \Omega$.

a) (2 točki) Naj bo $r > 0$ dovolj majhen, da je f obrnljiva na okolici zaprtega diska $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$. Dokaži, da za dovolj majhen $r_1 > 0$ velja za vse $w \in \mathbb{D}(f(z_0), r_1)$:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

b) (2 točki) S pomočjo zgornje formule izpelji formulo za odvod $(f^{-1})'(w)$ za $w \in \mathbb{D}(f(z_0), r_1)$.

c) (4 točke) Naj bo $w_0 = f(z_0)$. S pomočjo točke b) in integriranja po delih izpelji formulo

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \left(\frac{1}{f(\zeta) - w_0}\right) \left(1 - \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}\right)^{-1} d\zeta.$$

d) (6 točk) Integrand iz točke c) razvij v vrsto oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n.$$

Utemelji, da lahko vrsto členoma integriramo in dokaži, da za koeficiente c_n Taylorjeve vrste funkcije f^{-1} v razvoju na okolici w_0 velja

$$n c_n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - w_0}\right)^n \Bigg|_{z = z_0}.$$