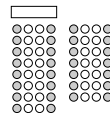


Kompleksna analiza: 1. izpit

31. 1. 2022

Čas pisanja je 180 minut. Možno je doseči 60 točk. Veliko uspeha!



Sedež (2.02)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Ime in priimek

1. naloga (10 točk)

- (3 točke) Zapiši definicijo holomorfno konveksne ogrinjače podmnožice $K \subset \mathbb{C}$.
- (3 točke) Zapiši definicijo Rungejevega para (Ω, Ω_0) , kjer sta $\Omega \subset \Omega_0$ podmnožici v \mathbb{C} .
- (4 točke) Določi, ali sta para domen Rungejeva ali ne. Utemelji! ($A(z; r, R)$ označuje množico $A(z; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$)
 - $(A(0; 1/4, 4), \mathbb{D}(0, 10))$
 - $(A(0; 1/4, 4), A(0; 1/8, 8))$

2. naloga (14 točk)

a) (3 točke) Zapiši Mittag-Lefflerjev izrek.

b) (4 točke) Utemelji, da predpis

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

podaja meromorfnu funkcijo na \mathbb{C} .

c) (7 točk) Pokaži, da velja

$$\frac{1}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{\pi^2} f(z).$$

Namig: pokaži, da je razlika zgornjih količin omejena!

3. naloga (8 točk)

- a) (3 točke) Zapiši Riemannov upodobitveni izrek.
- b) (5 točk) Naj bo Ω omejena, povezana in enostavno povezana domena v \mathbb{C} . Naj bo $p \in \Omega$ in naj bosta ϕ_i , $i = 1, 2$ biholomorfni preslikavi $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Recimo, da velja

$$\phi_1(p) = \phi_2(p) \quad \text{in} \quad \arg \phi_1'(p) = \arg \phi_2'(p).$$

Dokaži, da tedaj velja $\phi_1 \equiv \phi_2$.

4. naloga (14 točk)

- a) (3 točke) Zapiši definicijo normalne družine holomorfnih funkcij na domeni $\Omega \subset \mathbb{C}$.
- b) (3 točke) Zapiši Montelov izrek.
- c) (6 točke) Podana je družina funkcij $f_c : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ za $c \geq 0$, s predpisom $f_c(z) = e^{cz}$. Poišči maksimalno domeno $\Omega \subset \mathbb{C}$, na kateri je družina $\{f_c\}_{c \geq 0}$ normalna. Rezultat utemelji!
- d) (2 točki) Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ domena in \mathcal{F} družina holomorfnih funkcij na Ω , ki ni normalna. Pokaži, da tedaj obstaja $z_0 \in \Omega$, tako da \mathcal{F} ni normalna na nobeni okolici točke z_0 .

5. naloga (14 točk)

Naj bo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfná funkcija, ki je obrnljiva na neki okolici točke $z_0 \in \Omega$.

- a) (2 točki) Naj bo $r > 0$ dovolj majhen, da je f obrnljiva na okolici zaprtega diska $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$. Dokaži, da za dovolj majhen $r_1 > 0$ velja za vse $w \in \mathbb{D}(f(z_0), r_1)$:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

- b) (2 točki) S pomočjo zgornje formule izpelji formulo za odvod $(f^{-1})'(w)$ za $w \in \mathbb{D}(f(z_0), r_1)$.
c) (4 točke) Naj bo $w_0 = f(z_0)$. S pomočjo točke b) in integriranja po delih izpelji formulo

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \left(\frac{1}{f(\zeta) - w_0} \right) \left(1 - \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0} \right)^{-1} d\zeta.$$

- d) (6 točk) Integrand iz točke c) razvij v vrsto oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n.$$

Utemelji, da lahko vrsto členoma integriramo in dokaži, da za koeficiente c_n Taylorjeve vrste funkcije f^{-1} v razvoju na okolici w_0 velja

$$nc_n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \Big|_{z=z_0}.$$