Kombinatorika 2: 1. izpit

25. 1. 2022

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1			
2			
3			
4			
Σ			

Sedež (2.05)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Za $n \in \mathbb{N}$ pravimo množici $\{A_1, \cdots, A_r\}$ podmnožic $A_i \subseteq [n]$ *pokritje* $[n]$, če velja

1. $A_i \neq \emptyset$ za vsak $i = 1, \ldots, n$,
2. $A_i \neq A_j$ za $i \neq j$,
3. $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = [n]$.

Določi število c_n vseh pokritij množice $[n]$.
Na primer $c_1 = 1, c_2 = 5, c_3 = 109$. Konkretno, za $n = 2$ imamo sledečih 5 možnosti $[2] = \{1,2\} = \{1\} \cup \{2\} = \{1\} \cup \{1,2\} = \{2\} \cup \{1,2\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{1,2\}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}-1}}$$

- PIE: B_i = # of elts $\{A_1, \ldots, A_r\} \subseteq 2^{[n]}$ s.t. none of the A_i is empty or contains i, also $A_i \neq A_j$
- We need $|\bigcap B_i^c|$
- $|B_i|$? $\quad 2^{n-1} - 1$ = # of subsets $\neq \emptyset$ of a set with $n-1$ elts

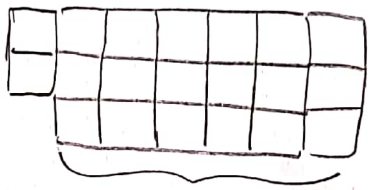
$\Rightarrow |B_i| = 2^{2^{n-1}-1}$ = # of subsets of

- Similarly $|B_I| = 2^{2^{n-|I|}-1}$
- Use the PIE formula to get

Scanned with CamScanner

(2)

(a) Def. b_k = # of tilings with ⊟ of a board of the shape



2k

Then

$$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \quad (1)$$

$$b_n = a_n + b_{n-1} \quad (2)$$

Hence (1) − 2·(2) : $a_n - 2b_n = a_{n-1} - 2a_n$

$$2b_n = 3a_n - a_{n-1}$$

and $2b_{n-1} = 3a_{n-1} - a_{n-2}$

Plug into (1) :

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-1} - a_{n-2}$$

Get $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} \rightsquigarrow a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$

• Compute OGF : $\dfrac{F(x) - 1 - 3x}{x^2} = 4 \cdot \dfrac{(F(x) - 1)}{x} - F(x)$

$$\therefore F(x) = \frac{1-x}{1-4x+x^2}$$

• Singularity : pole of order 1 at $x = 2 - \sqrt{3}$ ← closest to origin

Use formula.

3. naloga (25 točk)

Fiksirajmo števili $r, g \in \mathbb{N}$. Določi število d_n takih podmnožic v $[n]$ moči r, za katere je najmanjši skupni delitelj elementov posamezne množice enak g. Uporabi Möbiusovo inverzijo.

Pri izbiri $r = 2, g = 2$ je tako $d_6 = 3$ z možnostmi $\{2,4\}$, $\{2,6\}$ in $\{4,6\}$.

5 $([n], 1)$

3 $f(g)$ = # of k-subsets of $[n]$ whose gcd is g

5 $h(g)$ = # of k-subsets of $[n]$ whose gcd is a multiple of g

$\downarrow$

= # of k-subsets of $[n]$ whose elts are multiples of g

5 $= \binom{\lfloor \frac{N}{g} \rfloor}{k}$ choose k multiples of g

5 $h(g) = \sum_{g \mid m} f(m)$ explain why

$\downarrow$

2 $f(g) = \sum_{g \mid m} \mu(m) \binom{\lfloor \frac{N}{mg} \rfloor}{k}$

Σ

=

25

4. naloga (25 točk)

Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$. Polja plošče velikosti $2k \times 2k$ barvamo s črno ali belo barvo. Pri tem sta dve barvanji ekvivalentni, če lahko eno dobimo iz drugega preko rotacije ali zrcaljenja plošče.

10 a) ~~(8)~~ Določi ciklični indeks grupe simetrij plošče.

5 b) (5) Določi število različnih (neekvivalentnih) barvanj plošče.

10 c) ~~(12)~~ Naj bo b_n število barvanj plošče z n črnimi polji. Določi (običajno) rodovno funkcijo zaporedja $(b_n)_n$.

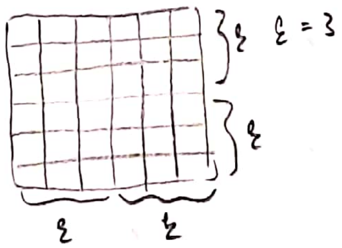
a)

$$Z_G(t_1, t_2, \dots) = \frac{1}{8}\Big[\underbrace{t_1^{4k^2}}_{\text{id}} + \underbrace{2\,t_1^{2k}\,t_2^{k(2k-1)}}_{\substack{\text{zrcaljenji} \\ / \text{ in } \backslash}} + \underbrace{3\,t_2^{2k^2}}_{\substack{\text{zrcaljenji} \\ | \text{ in } — \\ \text{ter} \\ \text{rotacija} \\ \text{za } 180^\circ}} + \underbrace{2\,t_4^{k^2}}_{\substack{\text{rotaciji} \\ \pm 90^\circ}}\Big]$$

G = grupa simetrij polj plošče
X = polja plošče

G = {id, rotacije : ±90°, 180°, zrcaljenja preko osi |, —, \, /}

X =



b) $Z_G(2, 2, \dots)$ $(r = 2)$

2 barvi!

c) $V_E(y_1, y_2) = Z_G(y_1 + y_2,\ y_1^2 + y_2^2,\ \dots)$

$B(x) = \sum b_n x^n$

$\Downarrow$

$B(x) = V_E(1, y_2)$