

Analiza 3, izpit iz teorije
2. februar 2022

Čas pisanja je 60 minut. Vsako nalogo piši na svojo stran, navedi številko naloge ter jih zloži po vrsti. Na prvo stran dodaj ime, podpis in vpisno številko.

Naloga 1. (30 točk)

1. (10 točk) Kaj vemo o obstoju, enoličnosti in gladkosti rešitev diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$?
2. (20 točk) Opiši dokaz eksistenčnega izreka kolikor mogoče natančno.

Naloga 2. (40 točk) Naj bo $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ avtonomno vektorsko polje na domeni $x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$.

1. (10 točk) Kaj je tok polja F ? Kaj vemo o njegovem obstoju, enoličnosti in lastnostih? Kaj pomeni, da je vektorsko polje kompletno?
2. (10 točk) Kaj je funkcija Lyapunova za vektorsko polje F in kaj nam pove o obstoju toka? Odgovor utemelji.
3. (10 točk) Kaj je tok linearnega vektorskega polja $F(x) = Ax$, kjer je A konstantna matrika?
4. (10 točk) Kaj je rešitev enačbe $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$, $x(0) = x^0$?

Naloga 3. (30 točk) Opiši postopek iskanja stacionarnih točk funkcionala

$$\mathcal{L}(x) = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

na prostoru $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$:

- (a) pri robnih pogojih $x(a) = A$, $x(b) = B$;
- (b) pri robnem pogoju $x(a) = x(b)$;
- (c) če vrednosti $x(a)$ in $x(b)$ nista predpisani.