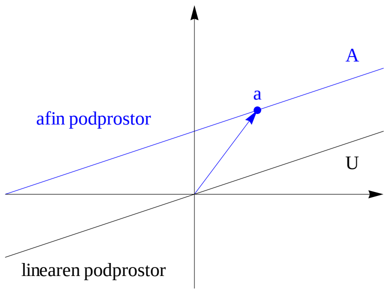
Afina in projektivna geometrija

Afini prostori in podprostori

Afini podprostori v $\mathbb{R}^n$ so posplošitve pojmov premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$. Množica $\mathcal{A}$ je afin podprostor v $\mathbb{R}^n$ dimenzije k, če jo lahko zapišemo v obliki

$$\mathcal{A} = a + U,$$

kjer je $a \in \mathcal{A}$ poljubna točka, $U \subset \mathbb{R}^n$ pa linearen podprostor dimenzije k. Točka a je analog začetne točke na premici, prostor U pa lahko razumemo kot množico smeri na $\mathcal{A}$.



V nadaljevanju bomo spoznali, kako lahko afine podprostore afinih prostorov opišemo v parametrični in v normalni obliki.

(1) V ravnini $3x + 2y + z = 7$ ležijo točke $T_0(1,1,2)$, $T_1(3,-1,0)$, $T_2(0,3,1)$, $A(2,0,1)$ in $B(0,4,-1)$. Določi lego točk A in B glede na trikotnik $T_0T_1T_2$.

Rešitev: Afine podprostore $\mathbb{R}^n$ lahko podamo v parametrični in v normalni obliki. Pri tej nalogi se bomo posvetili parametrični obliki in spoznali afine koordinate.

Začeli bomo z opisom ravnine v $\mathbb{R}^3$. Ravnino lahko podamo v parametrični obliki

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2,$$

kjer je $\vec{r}_0$ začetna točka in $\vec{s}_1$ ter $\vec{s}_2$ smerna vektorja. Če je ravnina definirana s tremi nekolinearnimi točkami T_0, T_1 in T_2, lahko poljubno točko te ravnine izrazimo v obliki

$$T = T_0 + t_1\overrightarrow{T_0T_1} + t_2\overrightarrow{T_0T_2}.$$

Številoma $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ rečemo *afini koordinati* točke T glede na afino ogrodje $\{T_0, T_1, T_2\}$.

V našem primeru je ravnina določena z enačbo $3x+2y+z = 7$. Za začetno točko vzemimo $T_0(1,1,2)$, za smerna vektorja pa:

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{T_0T_1} = (2,-2,-2),$$
$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{T_0T_2} = (-1,2,-1).$$

Najprej izračunajmo afini koordinati točke A glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$. Določeni sta s sistemom enačb

$$(2,0,1) = (1,1,2) + t_1(2,-2,-2) + t_2(-1,2,-1)$$

oziroma po komponentah:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 2t_1 - t_2, \\ 0 &= 1 - 2t_1 + 2t_2, \\ 1 &= 2 - 2t_1 - t_2, \end{aligned}$$

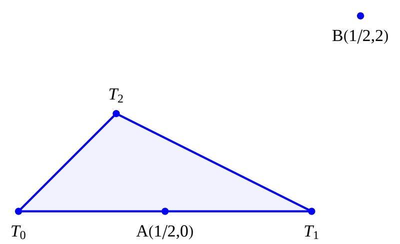
ki ima rešitev $t_1 = \frac{1}{2}$ in $t_2 = 0$. Od tod sledi, da je točka A središče stranice T_0T_1.
Afini koordinati točke B glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$ sta določeni s sistemom enačb

$$(0, 4, -1) = (1, 1, 2) + t_1(2, -2, -2) + t_2(-1, 2, -1)$$

oziroma:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2t_1 - t_2, \\ 4 &= 1 - 2t_1 + 2t_2, \\ -1 &= 2 - 2t_1 - t_2. \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $t_1 = \frac{1}{2}$ in $t_2 = 2$. Ker je $t_2 = 2 > 1$, leži točka B izven trikotnika $T_0T_1T_2$.



□

(2) V afinem prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(4, 6, -2)$, $B(-2, 0, 4)$, $C(0, 4, 1)$ in premica p s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (3, 2, 3) + t(2, 1, 1)$.

(a) Pokaži, da se premica p in trikotnik ABC ne sekata.

(b) Konstruiraj ravnino π, ki razdeli $\mathbb{R}^3$ na dva odprta polprostora tako, da ležita premica p in trikotnik ABC vsak v svojem polprostoru.

Rešitev: (a) Označimo s Σ ravnino, ki vsebuje trikotnik ABC. Pokazali bomo, da premica p seka Σ v točki, ki leži izven trikotnika ABC. Normala ravnine Σ je

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, -6, 6) \times (-4, -2, 3) = (-6, -6, -12).$$

Če upoštevamo, da na ravnini Σ leži točka A, dobimo njeno normalno enačbo

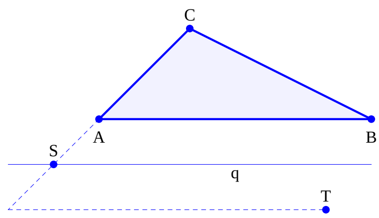
$$x + y + 2z = 6.$$

Presek premice p in ravnine Σ dobimo tako, da koordinate točke na premici vstavimo v normalno enačbo. Tako dobimo enačbo

$$(3 + 2t) + (2 + t) + 2(3 + t) = 6,$$

ki ima rešitev $t = -1$. Presek premice in ravnine je torej točka $T(1, 1, 2)$. Izračunamo lahko, da sta afini koordinati točke T glede na afino ogrodje $\{A, B, C\}$ enaki $\lambda_1 = \frac{7}{6}$ in $\lambda_2 = -1$, kar pomeni, da točka T leži izven trikotnika ABC.

(b) Najprej bomo konstruirali premico q, ki leži v ravnini Σ in je enako oddaljena od točke T in nosilke stranice AB.



Ta premica vsebuje točko $S(6, 7, -\frac{7}{2})$, njena smer pa je $\overrightarrow{AB} = (-6, -6, 6)$. Sedaj moramo poiskati ravnino Π, ki vsebuje to premico in ne seka premice p. Normala ravnine Π je torej

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{s}_p = (-6, -6, 6) \times (2, 1, 1) = (-12, 18, 6)$$

njena normalna enačba pa je

$$-2x + 3y + z = \frac{11}{2}.$$

$\square$

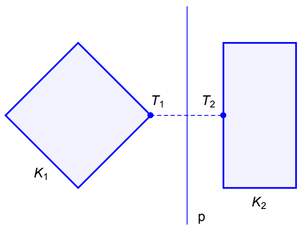
(3) Naj bosta K_1 in K_2 pravokotnika v $\mathbb{R}^2$. Pokaži, da sta K_1 in K_2 disjunktna natanko takrat, ko obstaja premica $p \subset \mathbb{R}^2$, za katero sta K_1 in K_2 vsak v svoji polravnini glede na p.

Rešitev: Denimo najprej, da obstaja premica $p \subset \mathbb{R}^2$, za katero sta K_1 in K_2 vsak v svoji polravnini glede na p. Ker sta polravnini disjunktni, sta tudi pravokotnika disjunktna.

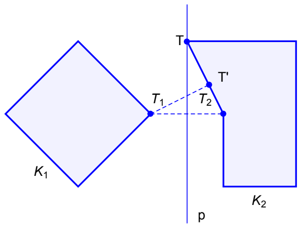
Z dokazom ekvivalence v obratni smeri bomo imeli več dela. Denimo torej, da sta K_1 in K_2 disjunktna pravokotnika v $\mathbb{R}^2$. Definirajmo zvezno funkcijo $d : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Množica $K_1 \times K_2$ je kompaktna, zato funkcija d na $K_1 \times K_2$ zavzameme minimalno vrednost d_{min} v nekem paru točk (T_1, T_2). Ker sta K_1 in K_2 disjunktna, je $d_{min} > 0$.



Naj bo sedaj p simetrala daljice T_1T_2. Z uporabo protislovja bomo pokazali, da p ne seka pravokotnikov K_1 oziroma K_2. Recimo, da premica p seka pravokotnik K_2 v točki T. Zaradi konveksnosti K_2 je potem cela daljica med T in T_2 vsebovana v K_2. Torej je v K_2 tudi pravokotna projekcija T' točke T_1 na daljico med T in T_2. Torej velja $d(T_1, T') < d(T_1, T_2)$, kar pa je v protislovju s predpostavko minimalnosti.

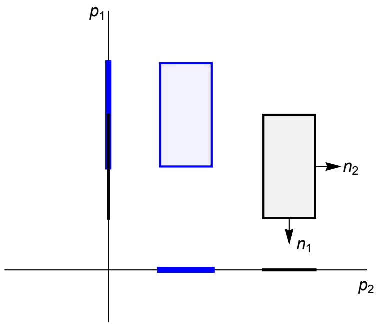


Ta izrek o separaciji se uporablja pri SAT algoritmu za testiranje prekrivanja konveksnih mnogokotnikov v ravnini.

(1) Najprej označimo smeri normal na stranice obeh mnogokotnikov z $n_1, \dots, n_k$ in za vsako normalo označimo s p_i premico skozi izhodišče v smeri normale.

(2) Izračunamo pravokotne projekcije oglišč obeh mnogokotnikov na dane premice (pri tem je dovolj projicirati samo oglišča).

(3) Če sta za katero od premic projekciji disjunktni, sta mnogokotnika disjunktna, sicer pa se sekata.



Poleg izreka o separaciji je v algoritmu uporabljen še dodatek, ki pravi, da lahko za premico p izberemo neko premico, ki je vzporedna eni od stranic enega od mnogokotnikov. $\square$

(4) Predstavi dane afine podprostore s sistemom enačb:

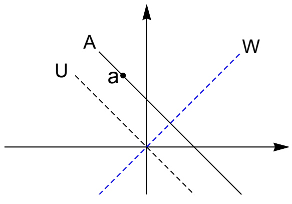
(a) poljuben podprostor oblike $\mathcal{A} = a + U$ v $\mathbb{R}^m$,

(b) premico skozi točki $(0, 1)$ in $(2, 2)$ v $\mathbb{Z}_5^2$,

(c) premico skozi točki $(0, 1)$ in $(i, 2)$ v $\mathbb{H}^2$.

Rešitev: (a) Pri tej nalogi bomo pokazali, da so afini podprostori $\mathbb{R}^m$ ravno množice rešitev sistemov linearnih enačb. Dobro znana sta primera premice v $\mathbb{R}^2$ in ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki ju lahko podamo z normalno enačbo. Premico v $\mathbb{R}^3$ pa lahko po drugi strani podamo kot rešitev sistema dveh neodvisnih enačb.

Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$ afin podprostor oblike $\mathcal{A} = a + U$, kjer je $a \in \mathcal{A}$ in $U \subset \mathbb{R}^m$ linearen podprostor dimenzije k. Denimo, da je $\{s_1, \dots, s_k\}$ neka baza vektorskega prostora U in $\{n_1, \dots, n_{m-k}\}$ neka baza prostora $W = U^\perp$.



Potem je $\mathcal{A}$ ravno množica rešitev sistema enačb

$$\begin{aligned} n_1 \cdot x &= n_1 \cdot a, \\ n_2 \cdot x &= n_2 \cdot a, \\ &\vdots \\ n_{m-k} \cdot x &= n_{m-k} \cdot a. \end{aligned}$$

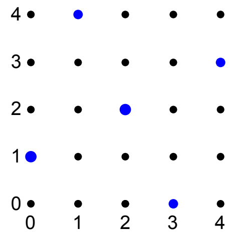
(b) Premica p skozi točki $(0, 1)$ in $(2, 2)$ v $\mathbb{F}_5^2$ ima začetno točko $a = (0, 1)$ in smer $s = (2, 1)$. Zato je njena parametrizacija oblike

$$r(t) = (0, 1) + t(2, 1),$$

kjer je $t \in \mathbb{F}_5$. Tako lahko izračunamo, da na premici p ležijo točke

$$p = \{(0, 1), (2, 2), (4, 3), (1, 4), (3, 0)\}.$$

Tokrat imamo opravka s končno afino ravnino, ki jo sestavlja 25 točk, na vsaki premici pa leži 5 točk.



Končnih obsegov ne moremo urediti, zato tudi ne moremo dobesedno posplošiti pojma skalarnega produkta in ortogonalnosti. V vektorskih prostorih nad poljubnimi obsegi zato normalne vektorje zamenjamo z ustreznimi linearnimi funkcionali, ki si jih predstavljamo kot koordinate na vektorskem prostoru. Za vektorski podprostor $U \subset \mathbb{F}^n$, kjer je $\mathbb{F}$ polje, definiramo anihilator

$$U^\perp = \{\phi \in (\mathbb{F}^n)^* \mid \phi(U) = 0\}.$$

Če je $\{s_1, \ldots, s_k\}$ neka baza vektorskega prostora U, so v $U^\perp$ vsi linearni funkcionali ϕ, ki zadoščajo pogoju $\phi(s_1) = \phi(s_2) = \ldots = \phi(s_k) = 0$. Če je na primer $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n-k}\}$ baza prostora $U^\perp$, lahko prostor $\mathcal{A} = a + U$ zapišemo v obliki sistema enačb:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \phi_1(a), \\ \phi_2(x) &= \phi_2(a), \\ &\vdots \\ \phi_{n-k}(x) &= \phi_{n-k}(a). \end{aligned}$$

V našem primeru imamo premico s smerjo $s = (2, 1)$ v $\mathbb{F}_5^2$, za bazo anihilatorja pa lahko vzamemo funkcional $\phi(x, y) = 2x + y$. Tako dobimo enačbo naše premice

$$2x + y = 1.$$

(c) Začnimo s parametrično enačbo. Premica skozi dani dve točki ima smerni vektor $s = (i, 1)$ in začetno točko $(0, 1)$. Zato jo lahko parametriziramo v obliki

$$r(t) = (0, 1) + t(i, 1) = (ti, 1 + t)$$

za $t \in \mathbb{H}$. Parametrična oblika enačbe ima enako obliko nad vsemi obsegi. V nadaljevanju pa bomo videli, da moramo biti v primeru nekomutativnih obsegov pozorni pri zapisu normalne oblike enačbe.

Ker je $s = (i, 1)$, lahko uganemo, da bi bil primeren linearni funkcional $\phi(x, y) = x - iy$, kar bi nam dalo enačbo

$$x - iy = -i.$$

Tej enačbi ustrezata točki $(0, 1)$ in $(i, 2)$, poglejmo pa, če ji zadoščajo vse točke na naši premici. Če vstavimo $x = ti$ in $y = 1 + t$ za poljuben $t \in \mathbb{H}$, dobimo:

$$\begin{aligned} ti - i(1 + t) &= -i, \\ ti &= it. \end{aligned}$$

Od tod bi sledilo, da kvaternion i komutira z vsakim kvaternionom, kar pa seveda ni res, saj je $ij = -ji = k$.

V primeru kvaternionov (oziroma bolj splošno nekomutativnih obsegov) moramo enačbo premice zapisati v obliki

$$xa + yb = c.$$

V našem primeru tako dobimo enačbo

$$x - yi = -i.$$

Ko sedaj vanjo vstavimo $x = ti$ in $y = 1 + t$, dobimo:

$$\begin{aligned} ti - (1 + t)i &= -i, \\ ti - i - ti &= -i, \end{aligned}$$

kar je v skladu z našimi pričakovanji. □

(5) Ugotovi, ali sta ravnina skozi točke $T_0(1, 0, 0, 0)$, $T_1(2, 0, 2, 1)$ in $T_2(1, 1, 1, 0)$ in premica, določena s sistemom enačb $x - w = 0$, $x - y + z = 1$ in $x + y - 2w = 2$, vzporedna afina podprostora v $\mathbb{R}^4$.

Rešitev: Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ afina podprostora v $\mathbb{R}^n$ in naj velja:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= a + U, \\ \mathcal{A}' &= a' + U'. \end{aligned}$$

Potem rečemo, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ vzporedna, če je $U \subset U'$ ali pa $U' \subset U$. Če imata $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ enako dimenzijo, sta vzporedna natanko takrat, ko je $U = U'$. V primeru dveh premic to pomeni, da imata vzporedna smerna vektorja.

V praksi lahko vzporednost afinih podprostorov preverimo na naslednja načina. Denimo, da je $\dim(\mathcal{A}) \leq \dim(\mathcal{A}')$. Potem sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ vzporedna natanko takrat, ko velja:

(1) vsak smerni vektor $\mathcal{A}$ je linearna kombinacija smernih vektorjev $\mathcal{A}'$,

(2) vsak normalni vektor $\mathcal{A}'$ je linearna kombinacija normalnih vektorjev $\mathcal{A}$,

(3) vsak smerni vektor $\mathcal{A}$ je pravokoten na vse normalne vektorje $\mathcal{A}'$.

V našem primeru imamo premico in ravnino v $\mathbb{R}^4$. Premica je določena s tremi neodvisnimi enačbami z normalami $\vec{n}_1 = (1,0,0,-1)$, $\vec{n}_2 = (1,-1,1,0)$ in $\vec{n}_3 = (1,1,0,-2)$. Smerni vektor premice je pravokoten na vse tri normale, zato njegove komponente zadoščajo sistemu enačb:

$$\begin{aligned} x - w &= 0, \\ x - y + z &= 0, \\ x + y - 2w &= 0. \end{aligned}$$

Ta sistem enačb reši na primer vektor $\vec{s} = (1,1,0,1)$. Ravnina ima po drugi strani smerna vektorja:

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0T_1} = (1,0,2,1), \\ \vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0T_2} = (0,1,1,0). \end{aligned}$$

Premica in ravnina sta vzporedni natanko takrat, ko je smerni vektor premice linearna kombinacija smernih vektorjev ravnine. Pa denimo, da obstajata realni števili α_1 in α_2, da velja

$$(1,1,0,1) = \alpha_1(1,0,2,1) + \alpha_2(0,1,1,0).$$

Po komponentah dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1, \\ 1 &= \alpha_2, \\ 0 &= 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 &= \alpha_1, \end{aligned}$$

ki pa ni rešljiv. Od tod sledi, da premica in ravnina nista vzporedni. □

(6) (a) Poišči število linearnih premic v afinem prostoru $\mathbb{F}_p^n$.
(b) Poišči število afinih premic v afinem prostoru $\mathbb{F}_p^n$.

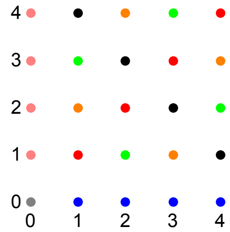
Rešitev: (a) Linearna premica v $\mathbb{F}_p^n$ je podprostor oblike

$$\mathcal{A} = \{\alpha s \mid \alpha \in \mathbb{F}_p\}$$

za nek neničeln $s \in \mathbb{F}_p^n$. Na vsaki takšni premici leži izhodišče in pa $p-1$ neničelnih točk. Če bi točko s zamenjali z neko drugo neničelno točko na $\mathcal{A}$, bi dobili isto premico, a z drugo parametrizacijo. To pomeni, da vsaka neničelna točka $a \in \mathbb{F}_p^n$ natanko določa linearno premico in da po $p-1$ neničelnih točk določa isto linearno premico. Ker je vseh neničelnih točk v $\mathbb{F}_p^n$ natanko $p^n - 1$, je

$$\text{število linearnih premic v } \mathbb{F}_p^n = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

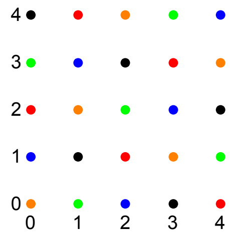
V afini ravnini $\mathbb{F}_5^2$ imamo tako na primer 6 linearnih premic. Na vsaki izmed njih ležijo štiri neničelne točke.



(b) Afine premice dobimo s translacijami linearnih premic. Vsako linearno premico lahko premaknemo na p^n načinov, vendar pa nam po p translacij določa isto vzporednico. Za vsako smer imamo torej p^{n-1} vzporednic s to smerjo, od koder sledi

$$\text{število afinih premic v } \mathbb{F}_p^n = p^{n-1} \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

V afini ravnini $\mathbb{F}_5^2$ imamo v vsaki smeri 5 vzporednic. Ena izmed njih pa je linearna.



$\square$