

Elementarna geometrija

Aksiomi o vzporednosti v nevtralni ravnini

V prejšnjem poglavju smo študirali nevtralno ravnino, ki ima do izomorfizma natančno dva različna modela. V tem poglavju pa bo naš cilj, da si malce bolj podrobno pogledamo, kaj moramo dodati aksiomom nevtralne ravnine, da dobimo evklidsko ravnino. Najpogostejše aksiom o vzporednosti formuliramo v eni izmed naslednjih treh oblik.

Evklidov 5. aksiom: Če premici p in q sekata premico t tako, da vsota notranjih kotov na enem bregu meri manj kot 180° , potem se premici p in q sekata na tem bregu t .

Playfairjev aksiom: Za vsako premico p in vsako točko A , ki ne leži na p , obstaja največ ena premica q skozi A , ki je vzporedna p .

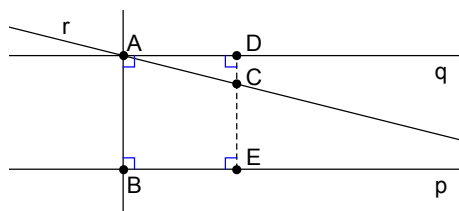
Hilbertov aksiom: Za vsako premico p in vsako točko A , ki ne leži na p , obstaja natanko ena premica q skozi A , ki je vzporedna p .

V nevtralni ravnini so vsi ti trije aksiomi ekvivalentni in skupaj z ostalimi Hilbertovimi aksiomi natanko določajo evklidsko ravnino. Čeprav to ni bila originalna Evklidova formulacija, se v današnjih časih pogosto Evklidov 5. aksiom formulira v verziji, ki je zgoraj označena kot Hilbertov aksiom. Ta formulacija je po eni strani bolj preprosta, po drugi strani pa se ne sklicuje na kote, kar nam omogoča, da jo uporabimo tudi pri študiju afine geometrije.

Vse tri formulacije so tesno povezane s pojmom vzporednosti premic v nevtralni ravnini. V naslednjih nalogah pa bomo videli, da bi lahko evklidsko ravnino natanko določili tudi s kakšnim aksiomom, ki na prvi pogled nima nobene zveze z vzporednostjo. Glavni viri teh karakterizacij so ideje mnogih matematikov, ki so tekom zgodovine poskušali izpeljati Evklidov 5. aksiom iz preostalih štirih. Praviloma pa se je izkazalo, da so pri svojem sklepu uporabili kakšno dejstvo, ki se jim je zdelo samoumevno, v resnici pa je ekvivalentno Evklidovemu 5. aksiomu.

(1) Analiziraj Proclusov dokaz Hilbertovega aksioma v nevtralni ravnini.

Rešitev: Začeli bomo z analizo Proclusovega dokaza, ki temelji na predpostavki, da sta dve vzporednici ekvidistantni. Naj bo p premica v nevtralni ravnini in A točka, ki ne leži na p . Označimo z B pravokotno projekcijo A na p in s q pravokotnico na $\overleftrightarrow{AB}$ skozi A .



Naj bo sedaj r premica skozi A , ki je različna od q in $\overleftrightarrow{AB}$. Pokazati moramo, da potem r seka p .

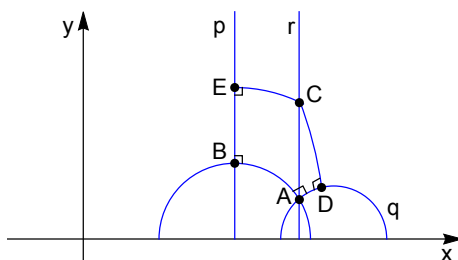
- Izberimo točko C na premici r , da bo poltrak $\overrightarrow{AC}$ ležal med poltrakom $\overrightarrow{AB}$ in enim izmed poltrakov na q .
- Označimo z D pravokotno projekcijo točke C na premico q .

- Ko gre C čedalje bolj proč od A , narašča dolžina daljice CD čez vse meje, zato je sčasoma $CD > AB$.
- Tako dobljena točka C leži na drugem bregu premice p kot A , zato se r in p sekata.

Ker smo od malih nog navajeni razmišljati v duhu evklidske geometrije, se nam zdi zgornji dokaz korekten. Zato je težko odkriti, kje v sklepu smo naredili napako. Če analiziramo dokaz korak za korakom, lahko preverimo, da res obstaja točka C z danimi lastnostmi. Prav tako vemo s predavanj, da lahko v nevtralni ravnini točko pravokotno projiciramo na premico. Nekaj več dela bi imeli z dokazom dejstva, da je sčasoma $CD > AB$, je pa ta sklep vseeno pravilen.

Problem je torej v zadnjem koraku. Iz dejstva, da je $CD > AB$, ne sledi nujno, da je C na drugem bregu premice p kot A . Označimo najprej z E pravokotno projekcijo točke C na premico p . Iz aksiomov nevtralne ravnine, v nasprotju z našo intuicijo, ne sledi, da so točke C , D in E kolinearne. Prav tako vzporednice v nevtralni ravnini niso nujno ekvidistantne, ampak lahko divergirajo. Zato je možno, da dolžina daljice CD narašča čez vse meje, pa sta kljub temu C in D ves čas na istem bregu premice p .

Poglejmo si primer v hiperbolični ravnini, ki pokaže napačnost zadnjega koraka v našem dokazu.

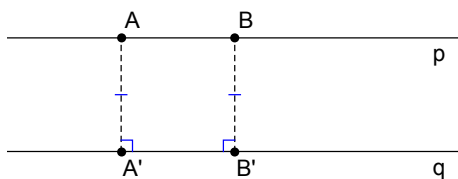


Ko potuje točka C po premici r čedalje dlje od točke A , je sčasoma $CD > AB$, vendar pa kljub temu premica r ne seka premice p . $\square$

- (2) Pokaži, da je v nevtralni ravnini Hilbertov aksiom ekvivalenten aksiomu, da so vzporednice ekvidistantne.

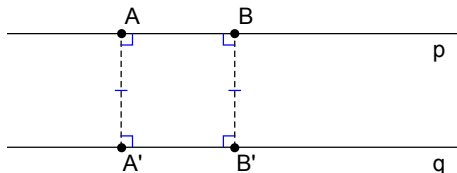
Rešitev: Pojem ekvidistantnosti premic je povezan z našim dožemanjem vzporednosti premic. Pogosto si namreč predstavljamo, da sta premici vzporedni, če sta ves čas na enaki oddaljenosti. V naši bolj formalni obravnavi geometrije pa smo v definiciji vzporednosti premic privzeli le, da se premici ne sekata. V tej nalogi bomo pokazali, da je pogoj, da so vzporednice ekvidistantne ekvivalenten Evklidovemu aksiomu o vzporednosti.

Definicija. Premici p in q v neutralni ravnini sta **ekvidistantni**, če za vsaki točki A in B s premice p velja $AA' \cong BB'$, kjer sta A' in B' pravokotni projekciji točk A in B na q .



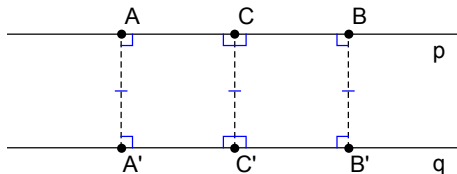
V zgornji definiciji premici p in q ne nastopata simetrično, zato bi bilo v tem primeru bolj korektno reči, da je p ekvidistantna glede na q . Se pa izkaže, da iz definicije sledi, da je tudi q ekvidistantna glede na p in da je ekvidistančnost ekvivalenčna relacija.

($\Rightarrow$) Recimo, da sta p in q vzporedni premici v nevtralni ravnini in predpostavimo, da velja Hilbertov aksiom. Izberimo različni točki A in B na p ter označimo z A' in B' njuni pravokotni projekciji na q . Pokazati moramo, da je $AA' \cong BB'$.



- Ker so v evklidski ravnini vzporednice enolične, je $p \perp \overleftrightarrow{AA'}$ in $p \perp \overleftrightarrow{BB'}$.
- Štirikotnik $AA'B'B$ je torej pravokotnik in posledično tudi paralelogram.
- Vsak paralelogram ima nasprotna para stranic skladna, zato je $AA' \cong BB'$.

($\Leftarrow$) Predpostavimo sedaj, da so v nevtralni ravnini vzporednice ekvidistantne. Pokazati moramo, da od tod sledi, da so vzporednice enolične. Izberimo vzporedni premici p in q ter različne točke A, B in C na p , tako da je $A * C * B$. Z A', B' in C' označimo pravokotne projekcije točk A, B in C na q .



- Iz predpostavke ekvidistantnosti vzporednic sledi, da so štirikotniki $A'B'BA$, $A'C'CA$ in $C'B'BC$ Saccherijevi štirikotniki.
- Po nalogi 15 iz prejšnjega poglavja od tod sledi $\angle A'AB \cong \angle B'BA \cong \angle ACC' \cong \angle BCC'$.
- Ker sta $\angle ACC'$ in $\angle BCC'$ sokota, sta torej oba prava kota.
- Štirikotnik $AA'C'C$ je torej pravokotnik. S predavanj pa vemo, da obstoj pravokotnika v nevtralni ravnini implicira Evklidov aksiom o vzporednosti.

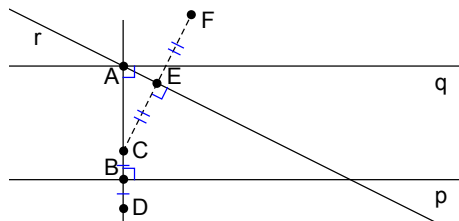
□

- (3) Pokaži, da je v nevtralni ravnini Hilbertov aksiom ekvivalenten aksiomu, da ima vsak trikotnik očrtano krožnico.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo analizirali Bolyaijev poskus dokaza Evklidovega aksioma o vzporednicah. Ideja njegovega dokaza temelji na predpostavki, da ima vsak trikotnik očrtano krožnico. Kot smo videli v prejšnjem poglavju, to ni nujno res v hiperbolični ravnini. V nadaljevanju pa bomo pokazali, da je predpostavka o obstoju očrtanih krožnic ekvivalentna Evklidovemu aksiomu o vzporednosti.

($\Rightarrow$) V prejšnjem poglavju smo v nalogi 14 že pokazali, da ima v evklidski ravnini vsak trikotnik očrtano krožnico.

($\Leftarrow$) Denimo sedaj, da ima vsak trikotnik v nevtralni ravnini očrtano krožnico. Pokazati moramo, da potem velja Hilbertov aksiom. Naj bo p premica in A točka, ki ne leži na p . Z B označimo pravokotno projekcijo A na p , s q pa pravokotnico na $\overleftrightarrow{AB}$ skozi A . Naj bo r premica skozi A , ki je različna od q in $\overleftrightarrow{AB}$. Pokazati moramo, da potem r seka p .



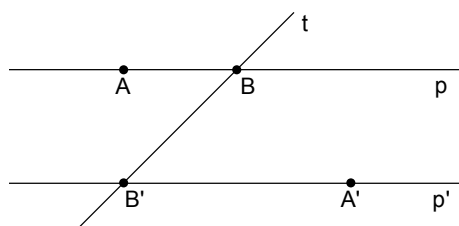
- Izberimo poljubno točko C na daljici AB .
- Naj bo D točka, za katero je $C * B * D$ in $BC \cong BD$.
- Naj bo E pravokotna projekcija C na r in F točka, za katero je $C * E * F$ in $EC \cong EF$.
- Ker so točke C , D in F nekolinearne, ima po naši predpostavki trikotnik $\triangle CDF$ očrtano krožnico.
- Po nalogi 14 iz prejšnjega poglavja se simetrale stranic trikotnika $\triangle CDF$ sekajo v isti točki. Ker je p simetrala stranice CD in r simetrala stranice CF , se torej premici p in r sekata.

□

- (4) Pokaži, da je v nevtralni ravnini Hilbertov aksiom ekvivalenten aksiomu o izmeničnih kotih.

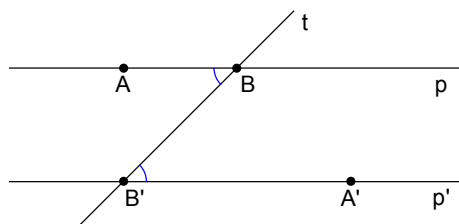
Rešitev: Začnimo z definicijo izmeničnih kotov v nevtralni ravnini.

Definicija. Naj bosta p in p' premici v nevtralni ravnini in t prečnica, ki seka p in p' v točkah B in B' . Izberimo točki $A \in p$ in $A' \in p'$ na nasprotnih bregovih premice t . Potem rečemo, da sta kota $\angle ABB'$ in $\angle A'B'B$ **izmenična kota**.



V nevtralni ravnini velja izrek o izmeničnih kotih.

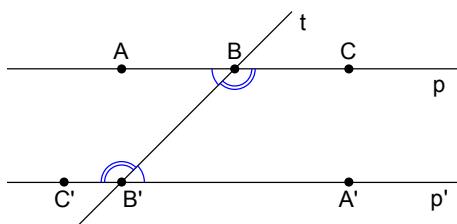
Izrek. Če sta izmenična kota skladna, sta premici vzporedni.



V evklidski ravnini smo navajeni tudi na obrat tega izreka, ki pravi, da sta izmenična kota ob vzporednicah skladna. V nadaljevanju bomo pokazali, da v nevtralni ravnini to ni nujno res in da je obrat izreka o izmeničnih kotih ekvivalenten Evklidovemu aksiomu o vzporednicah. Obrat izreka o izmeničnih kotih bomo v nevtralni ravnini formulirali v obliki aksioma.

Aksiom o izmeničnih kotih: Če vzporedni premici seka prečnica, sta oba para izmeničnih kotov skladna.

($\Rightarrow$) Privzemimo najprej, da v nevtralni ravnini velja Hilbertov aksiom in naj bosta p in p' vzporednici ter t prečnica, ki ju seka v točkah B in B' . Izberimo točki $A, C \in p$, da je $A * B * C$ in točki $A', C' \in p'$, da je $A' * B' * C'$. Nadalje privzemimo, da sta A in A' na nasprotnih bregovih premice t .

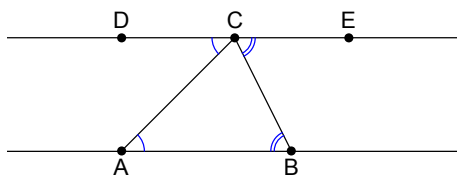


Pokazati moramo, da potem velja $\angle C'B'B \cong \angle CBB'$ in $\angle A'B'B \cong \angle ABB'$. Pa denimo, da je $\angle C'B'B < \angle CBB'$. Potem bi bilo tudi

$$\angle C'B'B + \angle ABB' < \angle CBB' + \angle ABB' = \pi,$$

kjer smo s π označili vsoto dveh pravih kotov. Po Evklidovem aksiomu o vzporednosti bi od tod sledilo, da se premici p in p' sekata na bregu, ki vsebuje točki A in C' . To pa nas pripelje v protislovje s predpostavko, da sta p in p' vzporedni. Podobno bi nas do protislovja pripeljala predpostavka, da je $\angle C'B'B > \angle CBB'$, zato mora po zakonu o trihotomiji veljati $\angle C'B'B \cong \angle CBB'$. Ker sta sokota skladnih kotov spet skladna, mora veljati tudi $\angle A'B'B \cong \angle ABB'$.

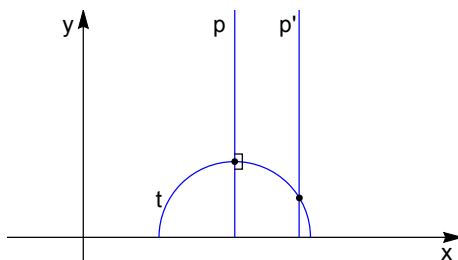
($\Leftarrow$) Sedaj bomo privzeli, da v nevtralni ravnini velja aksiom o izmeničnih kotih. Namesto Evklidovega aksioma o vzporednosti pa bomo od tod izpeljali ekvivalenten aksiom, da je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka π . Izberimo poljuben trikotnik $\triangle ABC$ in izberimo točki D in E , da je $\overleftrightarrow{DE}$ vzporedna $\overleftrightarrow{AB}$ in da je $D * C * E$.



Po aksiomu o izmeničnih kotih potem velja $\angle BAC \cong \angle DCA$ in $\angle ABC \cong \angle ECB$. Od tod sledi

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB \cong \angle DCA + \angle ECB + \angle ACB = \pi.$$

Za konec si pogledjmo še protiprimer v hiperbolični ravnini, kjer aksiom o izmeničnih kotih ne velja.



Premici p in p' sta vzporedni, izmenična kota ob prečnici t pa nista skladna. $\square$

(5) Pokaži, da je v nevtralni ravnini Hilbertov aksiom ekvivalenten Wallisovemu aksiomu.

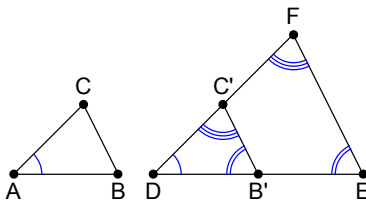
Rešitev: Za konec bomo pokazali še, da je Evklidov aksiom o vzporednosti ekvivalenten obstoju podobnih trikotnikov, ki niso skladni. V hiperbolični ravnini sta namreč podobna trikotnika avtomatično skladna.

Definicija. Trikotnika v nevtralni ravnini sta **podobna**, če imata skladne istoležne kote.

Izjavo o obstoju neskladnih podobnih trikotnikov bomo formulirali v obliki naslednjega aksioma.

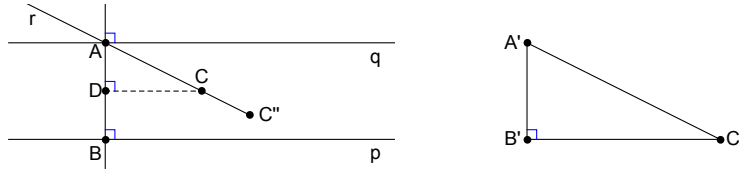
Wallisov aksiom: Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni ravnini in DE poljubna daljica. Potem obstaja trikotnik $\triangle DEF$, ki je podoben trikotniku $\triangle ABC$.

($\Rightarrow$) Privzemimo najprej, da v nevtralni ravnini velja Hilbertov aksiom in izberimo poljuben trikotnik $\triangle ABC$ ter daljico DE . Konstruirati moramo trikotnik $\triangle DEF$, ki bo podoben trikotniku $\triangle ABC$.



- V krajišču D daljice DE najprej odmerimo kot, ki je skladen kotu $\angle BAC$.
- Na obeh krakih dobljenega kota izberimo točki B' in C' , da bo veljalo $DB' \cong AB$ in $DC' \cong AC$. Po aksiomu SKS je potem $\triangle ABC \cong \triangle DB'C'$.
- Potegnimo vzporednico premice $\overleftrightarrow{B'C'}$ skozi točko E . Ker smo v evklidski ravnini, je vzporednost premic ekvivalenčna relacija, zato dobljena vzporednica seka premico $\overleftrightarrow{DC'}$ v točki, ki jo označimo z F .
- Vemo že, da so v evklidski ravnini izmenični in sovršni koti skladni. Zato je $\angle DEF \cong \angle DB'C' \cong \angle ABC$ in $\angle DFE \cong \angle DC'B' \cong \angle ACB$. Ker je tudi $\angle BAC \cong \angle EDF$, sta trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ podobna.

($\Leftarrow$) Denimo sedaj, da v nevtralni ravnini velja Wallisov aksiom, pokazati pa želimo, da potem velja tudi Hilbertov aksiom. Naj bo p premica in A točka, ki ne leži na p . Z B označimo pravokotno projekcijo A na p , s q pa pravokotnico na $\overleftrightarrow{AB}$ skozi A . Naj bo r premica skozi A , ki je različna od q in $\overleftrightarrow{AB}$. Pokazati moramo, da potem r seka p .



- Izberimo točko $C \in r$, ki leži na istem bregu premice q kot B in označimo z D pravokotno projekcijo C na $\overrightarrow{AB}$.
- Po Wallisovem aksiomu obstaja trikotnik $\triangle A'B'C'$, ki je podoben trikotniku $\triangle ADC$ in velja $A'B' \cong AB$.
- Izberimo točko $C' \in \overrightarrow{AC'}$, za katero je $AC'' \cong A'C'$.
- Po aksiomu SKS sta trikotnika $\triangle A'B'C'$ in $\triangle ABC''$ skladna. Zato je tudi $\angle ABC'' \cong \angle A'B'C'$.
- Kot $\angle ABC''$ je torej pravi, kar pa pomeni, da je $C'' \in p$.

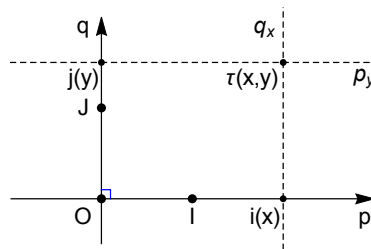
□

V tem poglavju smo spoznali nekatere aksiome, ki so v nevtralni ravnini ekvivalentni Evklidovemu aksiomu o vzporednosti. Spodaj so napisane nekatere najbolj pomembne ekvivalentne formulacije Evklidovega aksioma.

- (1) Vsota notranjih kotov v trikotniku je enaka 180° .
- (2) Obstaja pravokotnik.
- (3) Vzporednice so ekvidistantne.
- (4) Vsak trikotnik ima očrtano krožnico.
- (5) Izmenični koti ob vzporednicah so skladni.
- (6) Obstajajo podobni trikotniki, ki niso skladni.
- (7) Obstajajo trikotniki s poljubno veliko ploščino.
- (8) Za pravokotne trikotnike velja Pitagorov izrek v obliki $c^2 = a^2 + b^2$.

Glede na našo intuicijo, ki si jo pridobimo pri študiju geometrije v osnovni in srednji šoli, se nam zdijo vse zgornje trditve samoumevne. Paziti pa moramo, da so v bistvu ekvivalentne Evklidovemu 5. aksiomu in zato ne veljajo v hiperbolični ravnini.

Za konec omenimo še, da je vsak model evklidske ravnine izomorfen kartezičnemu modelu $\mathbb{R}^2$. Naj bo torej E nevtralna ravnina, v kateri velja Evklidov 5. aksiom. V nadaljevanju si bomo pogledali, kako lahko konstruiramo izomorfizem $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$.



- Izberimo premico q v E in točko I , ki ne leži na q .
- Naj bo p pravokotnica na q skozi I in označimo $O = p \cap q$.

- Na q izberimo točko J , da bo $OI \cong OJ$.
- Po Dedekindovem aksiomu dobimo bijekciji:

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\rightarrow p, i(0) = O, i(1) = I, \\ j : \mathbb{R} &\rightarrow q, j(0) = O, j(1) = J, \end{aligned}$$

ki ohranjata urejenost.

- Za $x \in \mathbb{R}$ naj bo q_x vzporednica q skozi $i(x)$, za $y \in \mathbb{R}$ pa naj bo p_y vzporednica p skozi $j(y)$.
- Izomorfizem $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ je potem definiran s predpisom

$$\tau(x, y) = q_x \cap p_y.$$