

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [20 točk]

S pomočjo tangentne metode izpeljite iteracijo za izračun $\sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

- Kolikšen je red konvergence izpeljane metode?
- Dokažite, da je za $k = 3$ začetni približek $x_0 = 2$ ustrezen za iskanje števila $\sqrt[3]{5}$ in s pomočjo izpeljane metode izračunajte $\sqrt[3]{5}$ na 5 decimalk natančno.

Rešitev. Pri tangentni metodi je iteracijska funkcija oblike:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Izberemo $f(x) = x^k - a$ in dobimo:

$$g(x) = x - \frac{x^k - a}{kx^{k-1}} = \frac{(k-1)x^k + a}{kx^{k-1}}.$$

- Prvi odvod funkcije g je

$$g'(x) = \frac{(k-1)(x^k - a)}{kx^k}.$$

Velja:

$$g'(\sqrt[k]{a}) = 0,$$

zato izračunamo še drugi odvod:

$$g''(x) = \frac{(k-1)x^{k-1}a}{x^{2k}}.$$

Velja

$$g''(\sqrt[k]{a}) = \frac{k-1}{\sqrt[k]{a}} \neq 0,$$

torej je red konvergence kvadratičen.

- Imamo iteracijsko funkcijo

$$g(x) = \frac{2x^3 + 5}{3x^2}$$

in njen odvod

$$g'(x) = \frac{2(x^3 - 5)}{3x^3}.$$

Dan je začetni približek $x_0 = 2$. Da bo metoda konvergirala, mora veljati

$$|g'(x_0)| < 1.$$

Velja

$$|g'(x_0)| = \frac{1}{4} < 1,$$

torej bo metoda konvergirala.

Točna vrednost $\sqrt[3]{5}$ na 5 decimalk je 1.70997. Računamo:

$$x_1 = g(x_0) = 1.75,$$

$$x_2 = g(x_1) = 1.7108844\dots,$$

$$x_3 = g(x_2) = 1.7099764\dots$$

Približek x_3 se s točno rešitvijo ujema na 5 decimalk.

Naloga 2 [20 točk]

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 18 & a \\ 2 & 5 & a & 9 \end{bmatrix}.$$

Za katere vrednosti parametra a je matrika A pozitivno definitna?

Rešitev. Za matriko A poiščemo razcep Choleskega. Dobljeni faktor Choleskega V je

$$V = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 3 & 3 & \\ 2 & 1 & \frac{a-3}{3} & \sqrt{4 - \frac{(a-3)^2}{9}} \end{bmatrix}.$$

Vsi diagonalni elementi matrike V morajo biti pozitivni, torej dobimo pogoj

$$4 - \frac{(a-3)^2}{9} > 0.$$

Zgornje se poenostavi v

$$a^2 - 6a - 27 < 0,$$

oz.

$$-3 < a < 9.$$

Naloga 3 [20 točk]

Z uporabo Givensovih rotacij rešite predoločen sistem

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev.

1. Izračunamo $r = \sqrt{9 + 16} = 5$, $c = \frac{3}{5}$ in $s = \frac{4}{5}$. Matrika R_{12}^T je enaka

$$R_{12}^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobimo:

$$R_{12}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad R_{12}^T \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{5} \\ \frac{52}{5} \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R_{12}^T \cdot \begin{bmatrix} -13 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{91}{5} \\ 13 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunamo $r = \sqrt{25 + 144} = 13$, $c = \frac{5}{13}$ in $s = \frac{12}{13}$. Matrika R_{13}^T je enaka

$$R_{13}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & 0 & \frac{12}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{12}{13} & 0 & \frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

Dobimo:

$$R_{13}^T \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_{13}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{36}{5} \\ \frac{52}{5} \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{52}{5} \\ -\frac{507}{65} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R_{13}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{91}{5} \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ \frac{91}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}.$$

3. Izračunamo $r = 13$, $c = \frac{4}{5}$ in $s = -\frac{3}{5}$. Matrika R_{23}^T je enaka

$$R_{23}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Dobimo:

$$R_{23}^T \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_{23}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{52}{5} \\ -\frac{507}{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad R_{23}^T \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ \frac{91}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rešimo

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

in dobimo $x = 1$ in $y = 1$.

Naloga 4 [20 točk]

Poiščite singularni razcep za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Singularni razcep matrike A je oblike

$$A = U\Sigma V^T,$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ in $V \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ortogonalni matriki, $\Sigma \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ pa je oblike $[\sigma \ 0 \ 0 \ 0]^T$, kjer σ označuje singularno vrednost matrike A . Najprej poiščemo singularno vrednost σ , ki je enaka korenu lastne vrednosti λ matrike $A^T A$:

$$A^T A = 25 \implies \lambda = 25 \implies \sigma = 5.$$

Matrika V mora biti ortogonalna, torej je edina možnost $V = [1]$. Velja

$$U^T A = \Sigma V^T = \Sigma,$$

zato lahko matriko U^T dobimo tako, da poiščemo matriko za zrcaljenje preko ravnine z normalo $\mathbf{w}$, ki bo vektor $[4 \ 1 \ 2 \ 2]^T$ preslikala v vektor $[5 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Matrika P za zrcaljenje preko ravnine z normalo $\mathbf{w}$ je

$$P = I - \frac{2}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w} \mathbf{w}^T.$$

V našem primeru je normala $\mathbf{w}$ enaka

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Velja $\mathbf{w}^T \mathbf{w} = 10$ in

$$\mathbf{w} \mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

torej je matrika P enaka

$$P = I - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Matrika P je simetrična, torej velja $U = P$.