

Slučajni procesi 1

Procesi štetja

Janez Bernik

Univerza v Ljubljani

janez.bernik@fmf.uni-lj.si

14. februar 2022

Slučajni procesi

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. Naj bo $\Lambda \neq \emptyset$ neprazna indeksna množica in $(E, \mathcal{E})$ prostor stanj, kjer je E množica stanj, $\mathcal{E}$ pa je σ -algebra na E .

Slučajni proces, parametriziran z Λ in prostorom stanj E , je nabor $(X_t; t \in \Lambda)$ oziroma $((X_t)_{t \in \Lambda})$ slučajnih spremenljivk na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $(E, \mathcal{E})$. Torej je preslikava $X_t : \Omega \longrightarrow E$ $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -merljiva za vsak $t \in \Lambda$.

Če je indeksna množica Λ končna in prostor stanj $\mathbb{R}$ z Borelovo σ -algebro, imamo opravka z običajnim slučajnim vektorjem. Stvari postanejo zanimive, če je bodisi Λ neskončna ali/in ima še kak dodaten pomen in strukturo. Pomemben je primer, ko je $\Lambda \subset \mathbb{R}$ s podedovano strukturo linearne urejenosti in topologije. Takrat običajno govorimo o indeksni množici kot *času*: diskretnem, če je Λ diskretna množica oziroma zveznem sicer.

Nas bo v nadaljevanju zanimal predvsem primer, ko je $\Lambda = [0, \infty)$. V takem primeru pišemo tudi $(X_t)_{t \geq 0}$.

Trajektorije

Od zdaj naprej naj bo $\Lambda = [0, \infty)$ in $E = \mathbb{R}^d$ z Borelovo σ -algebro.

Pri fiksnem $\omega \in \Omega$ je preslikava $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d : t \mapsto X_t(\omega)$ *realizacija* oziroma *trajektorija* (“sample path”) slučajnega procesa $(X_t)_{t \geq 0}$.

Na slučajni proces lahko gledamo tudi kot na predpis, ki nam iz vzorčnega prostora Ω da trajektorijo (slučajno funkcijo) $(X_t(\omega))_{t \in \Lambda}$, ki je funkcija iz $[0, \infty)$ v $\mathbb{R}^d$, torej se lahko pogovarjamo o tem, ali ima kakšne dodatne lastnosti.

To je pomembno iz več razlogov. Recimo, da je $d = 1$ in se želimo pogovarjati o verjetnosti, da je $X_t \leq 0$, za vse $t \in [0, 1]$. Tako mora biti

$$\{X_t \leq 0, 0 \leq t \leq 1\} = \bigcap_{0 \leq t \leq 1} \{X_t \leq 0\}$$

dogodek, kar iz zgornjega ne sledi neposredno, saj imamo opravka z neštevnim presekom dogodkov.

Zveznost z desne z levimi limitami

Običajno se problem merljivosti takih in podobnih množic reši na način, da se zahteva, da so trajektorije kot funkcije zvezne z desne z levimi limitami (krajše càdlàg) vsaj skoraj gotovo. Potem lahko zapišemo

$$\{X_t \leq 0, 0 \leq t \leq 1\} = \bigcap_{t \in \mathbb{Q}, 0 \leq t \leq 1} \{X_t \leq 0\} \quad \text{s.g.}$$

in je le-to dogodek (vsaj če, po potrebi, napolnimo $\mathcal{F}$).

Vprašanje, ki se pojavi, je, ali càdlàg procesi sploh obstajajo in če, kako jih skonstruirati. Odgovor je seveda, da obstajajo, a konstrukcija tipično ni ne lahka ne očitna. Procesni štetja, ki jih bomo obravnavali pri tem predmetu, imajo to lastnost po konstrukciji in so najlažji primer càdlàg procesov.

Porazdelitev procesa

Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Potem za vsak $n \geq 1$ in vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ načeloma poznamo skupno porazdelitev slučajnih vektorjev

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$$

(mnogokrat ne eksplicitno ampak samo posredno), ki ji rečemo *končnorazsežna robna porazdelitev*.

Naj bo $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}$ σ -algebra, ki jo generirajo vsi $(X_t)_{t \geq 0}$. To je σ -algebra dogodkov, ki so določeni s procesom. Vprašanje, ki se pojavi je, ali je s končnorazsežnimi robnimi porazdelitvami povsem določena verjetnost na $\mathcal{F}_\infty$. Odgovor je da, kar sledi iz Dynkinove leme. Pomembni posledici sta naslednji.

1) Naj bo $(Y_t)_{t \geq 0}$ nek drug proces na $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ z vrednostmi v $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ in naj bo $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$ kot zgoraj. Naj za vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ velja

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{(d)}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$$

Potem za dogodka $A \in \mathcal{F}_\infty$ in $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{F}}_\infty$, ki sta določena na enak način prek $(X_t)_{t \geq 0}$ in $(Y_t)_{t \geq 0}$ velja $\mathbb{P}(A) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A})$. Tedaj rečemo, da sta procesa *enako porazdeljena* $(X_t)_{t \geq 0} \stackrel{(d)}{=} (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$.

2) Naj bo $(Y_t)_{t \geq 0}$ nek drug proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ in naj bo $\mathcal{G}_\infty$ σ -algebra, generirana z $(Y_t)_{t \geq 0}$. Naj za vsak nabor $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ velja, da sta vektorja $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ in $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$ neodvisna. Potem za vsak $A \in \mathcal{F}_\infty$ in $B \in \mathcal{G}_\infty$ velja $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, torej sta $\mathcal{F}_\infty$ in $\mathcal{G}_\infty$ neodvisni. Tedaj rečemo, da sta procesa *neodvisna*.

Prirastki

Naj bo $(X_t)_{t \geq 0}$ slučajni proces z vrednostmi $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Potem, za $t < s$, definiramo *prirastek procesa* $X_s - X_t$ na intervalu $[t, s]$.

Proces $(X_t)_{t \geq 0}$ kot zgoraj ima *neodvisne prirastke*, če so za vsak nabor $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ prirastki

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad \text{neodvisni.}$$

Če za $\forall h > 0$ in vsak nabor $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja še

$$(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \dots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h}) \stackrel{(d)}{=} (X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}),$$

ima proces $(X_t)_{t \geq 0}$ *stacionarne prirastke*.

Naravna filtracija, časi ustavljanja

Za slučajni proces $(X_t)_{t \geq 0}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $(E, \mathcal{E})$ naj bo $\mathcal{F}_t$ σ -podalgebra v $\mathcal{F}$, ki jo generirajo slučajne spremenljivke X_s , $0 \leq s \leq t$. Očitno je $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$, $t < s$, torej je $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ zvezna filtracija verjetnostnega prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ki ji je proces prilagojen. Rečemo ji *naravna filtracija*. Sledi, da je $\mathcal{F}_\infty$ σ -podalgebra v $\mathcal{F}$, generirana z vsemi $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.

Za filtriran verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ je slučajna spremenljivka $T: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *čas ustavljanja*, če velja

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Za čas ustavljanja T definiramo še σ -podalgebro *zgodovine* T kot

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

Za càdlàg procese se izkaže, da je T merljiva glede na $\mathcal{F}_T$. Prav tako je X_T , definirana na $\{T < \infty\}$, tudi merljiva glede na $\mathcal{F}_T$.

Proces štetja

Proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$ je slučajni poroces s prostorom stanj $(\mathbb{N}_0, P(\mathbb{N}_0))$ ($\subset (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$), pri katerem so trajektorije

$$t \longmapsto N_t(\omega), \quad t \geq 0,$$

nepadajoče, zvezne z desne in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$ za vsak $\omega \in \Omega$. Ker so po predpostavki trajektorije nepadajoče, obstaja za vsak $t > 0$

$$N_{t-} = \lim_{s \uparrow t} N_s.$$

V posebnem je proces štetja càdlàg.

Če je proces (štetja) $(N_t)_{t \geq 0}$ tak, da so trajektorije samo skoraj gotovo nepadajoče, zvezne z desne in z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, lahko z zožitvijo na dogodek A (z verjetnostjo ena) dobimo proces štetja $\tilde{N}_t = N_t|_A$, $t \geq 0$. Očitno velja $\mathbb{P}(N_t = \tilde{N}_t, \forall t \geq 0) = 1$ (rečemo, da sta procesa nerazločljivi modifikaciji).

Zaporedni časi skokov

Pri danem procesu štetja $(N_t)_{t \geq 0}$ definiramo *zaporedne čase skokov* na sledeč način:

$$S_1 = \inf\{t > 0; N_t \neq N_0\} \quad (\inf \emptyset = \infty)$$

$$S_2 = \inf\{t > S_1; N_t \neq N_{S_1}\} \mathbb{1}_{\{S_1 < \infty\}} + \infty \mathbb{1}_{\{S_1 = \infty\}}$$

in induktivno

$$S_{n+1} = \inf\{t > S_n; N_t \neq N_{S_n}\} \mathbb{1}_{\{S_n < \infty\}} + \infty \mathbb{1}_{\{S_n = \infty\}}, \quad n \geq 1.$$

Torej dobimo zaporedje:

$$0 < S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots$$

zaporednih časov skokov (enačaj nastopi le, če sta obe strani $+\infty$).

Zaporedni časi skokov so časi ustavljanja

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ proces štetja in $(S_n)_{n \geq 1}$ pripadajoči zaporedni časi skokov. Potem so le-ti časi ustavljanja za naravno filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ procesa $(N_t)_{t \geq 0}$. Res, za S_1 velja

$$\{S_1 \leq t\} = \{N_t \neq N_0\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0.$$

Za S_2 je

$$\{S_2 \leq t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap (0, t)} \{N_0 \neq N_s, N_s \neq N_t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0,$$

in v splošnem za $n \geq 1$

$$\{S_n \leq t\} = \bigcup_H \{N_0 \neq N_{s_1}, N_{s_1} \neq N_{s_2}, \dots, N_{s_{n-1}} \neq N_t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0,$$

kjer je $H = \{(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{Q}^{n-1}; 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < t\}$ števna množica. Tako sledi, da so vsi S_n merljivi in celo časi ustavljanja.

Enostavni procesi štetja

Potem je na dogodku $\{S_n < \infty\}$ $N_{S_n}(\omega) = N_{S_n(\omega)}(\omega)$, $n \geq 1$, ne samo dobro definirana funkcija (kar smo upoštevali pri induktivni definiciji zaporednih časov skokov) ampak celo $\mathcal{F}_{S_n}$ merljiva.

Na $\{S_n < \infty\}$ definiramo tudi

$$N_{S_n-} = \lim_{s \uparrow S_n} N_s, \quad n \geq 1,$$

in nato *višine skokov*

$$\Delta(S_n) = N_{S_n} - N_{S_n-}, \quad n \geq 1.$$

Tudi za N_{S_n-} in $\Delta(S_n)$ velja, da sta $\mathcal{F}_{S_n}$ -merljivi.

Očitno je $\Delta(S_n) \geq 1$, če je definiran. Proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$ je *enostaven*, če je $\Delta(S_n) = 1$, kjerkoli je definiran. Za enostavne procese štetja je potem

$$N_t = N_0 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}.$$

Odsotnost eksplozije

V splošnem je za proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$

$$N_t = N_0 + \sum_{n \geq 1} \Delta(S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}},$$

torej je podan z naborom spremenljivk $(N_0, (S_n)_{n \geq 1}, \Delta(S_n))$, kjer je $\Delta(S_n)$ definiran le, če je $S_n < \infty$, saj lahko iz njih rekonstruiramo trajektorijo. Ker je $N_t < \infty$ za vsak $t \geq 0$ sledi, da ima vsaka trajektorija na poljubnem končnem intervalu le končno mnogo skokov, torej ni eksplozije.

Eksplozija bi bil dogodek, ko se skoki akumulirajo v času, torej ko je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty < \infty$. Dostikrat podamo proces štetja z naborom slučajnih spremenljivk $(N_0, (S_n)_{n \geq 1}, \Delta(S_n))$ z očitnimi lastnostmi $(N_0, \Delta(S_n))$ z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, $(S_i)_{i \geq 1}$ strogo monotono naraščajoče zaporedje dokler končno, $\Delta(S_n) \geq 1$) na nekem verjetnostnem prostoru. Da bo na ta način določen proces štetja, mora veljati $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ vsaj skoraj gotovo.

Karakterizacije homogenega Poissonovega procesa

Naj bo $\lambda > 0$ dano realno število in $(N_t)_{t \geq 0}$ enostavni proces štetja, za katerega je $N_0 = 0$. Potem so za ta proces ekvivalentne naslednje trditve:

1) Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke in za vsak $t \geq 0$ je

$$N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t).$$

Če velja 1), so s tem implicitno podane vse končnorazsežne robne porazdelitve procesa. Res, za $n \geq 1$ in $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ je

$$(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n}) = (N_{t_1}, N_{t_1} + (N_{t_2} - N_{t_1}), \dots, N_{t_{n-1}} + (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})),$$

kjer ima $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ neodvisne komponente po predpostavki o neodvisnosti prirastkov in je zaradi

stacionarnosti $N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \stackrel{(d)}{=} N_{t_i - t_{i-1}} \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$.

Infinitezimalna karakterizacija

2) Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke in, ko $t \downarrow 0$, velja

$$P(N_t = 1) = \lambda t + o(t),$$

$$P(N_t \geq 2) = o(t).$$

Tu je $o(t)$ Landauova oznaka za razred funkcij $g(t)$ z lastnostjo $\lim_{t \downarrow 0} \frac{g(t)}{t} = 0$.

Druga karakterizacija je v duhu zelo podobna prvi, le da ne podamo eksplicitno porazdelitve za N_t , $t \geq 0$, ampak le neko njeno infinitezimalno obnašanja pri $t = 0$.

Lastnost medprihodnih časov

3) Za zaporedne čase skokov S_n velja, da je $S_n < \infty$ s.g. za vsak $n \geq 1$. Če označimo $S_0 = 0$, je zaporedje medprihodnih časov

$$T_i = S_i - S_{i-1}, \quad i \geq 1,$$

dobro definirano in je porazdeljeno kot zaporedje neodvisnih in enako $\text{Exp}(\lambda)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

Pomen te karakterizacije je, da nam zagotavlja obstoj homogenega Poissonovega procesa in daje algoritem za njegovo simulacijo. Res, naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tak verjetnostni prostor, da na njem obstaja neko zaporedje $(E_i)_{i \geq 1}$ neodvisnih enako $\text{Exp}(\lambda)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $(0, \infty)$. Ker je po KZVŠ Kolmogorova $\mathbb{P}(\sum_{i \geq 1} E_i = \infty) = 1$, je na tem dogodku s predpisom $N_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n E_i$, $\Delta(S_n) = 1$, $n \geq 1$ in $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}$ podan proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$, ki zadošča pogoju 3).

Lastnost vrstilnih statistik

4) Za vsak $t > 0$ je $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$ in, pogojno na $\{N_t = k\}$, $k \geq 1$, za vektor časov prvih k skokov velja

$$(S_1, S_2, \dots, S_k) | \{N_t = k\} \stackrel{(d)}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(k)}),$$

kjer je vektor $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(k)})$ vektor vrstilnih statistik vektorja $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ neodvisnih enako $EZ[0, t]$ -porazdeljenih komponent. Pogojna gostota vektorja $(S_1, S_2, \dots, S_k)$ pri pogoju $\{N_t = k\}$ je

$$p(s_1, s_2, \dots, s_k) = \frac{k!}{t^k} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < t\}} ds_1 ds_2 \dots ds_k.$$

Tudi lastnost 4) nam omogoča simulacijo trajektorij do nekega fiksnega časa $t > 0$. Najprej iz $\text{Pois}(\lambda t)$ simuliramo, koliko skokov naj bi pri tej trajektoriji bilo. Recimo, da je izid k . Potem moramo k -krat simulirati neodvisno enakomerno zvezno na intervalu $[0, t]$, razvrstiti rezultate po velikosti in dobimo čase prihodov od 0 do t , kar nam da trajektorije.

$HPP(\lambda)$

Procesu štetja, ki zadošča eni (torej vsem) od teh štirih točk, rečemo homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo λ ali krajše $HPP(\lambda)$.

Obstaja še veliko drugih karakterizacij za $HPP(\lambda)$. V nadaljevanju bomo spoznali tudi še precej njegovih lastnosti. V praksi se uporablja za modeliranje časov dogodkov, ki prihajajo iz “modrega neba” (prihodi gama žarkov, časi potresov, časi zavarovalniških zahtevkov v neživljenskem zavarovanju,...) in so homogeno razporejeni v času, to je, verjetnost prihoda/skoka v nekem časovnem oknu je odvisna le od dolžine le-tega, ne pa samega položaja. Po drugi strani pa nastopajo kot gradnik v konstrukciji bolj zapletenih procesov (markovske verige v zveznem času, Lévyjevi procesi,...).

Opombe:

- ▶ V literaturi se dostikrat zahteva pri definiciji $HPP(\lambda)$, da je to proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$, za katerega velja $N_0 = 0$ s.g., da ima neodvisne in stacionarne prirastke in $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$, $t > 0$. Torej ne zahtevamo, da je to enostaven proces štetja (da ima skoke velikosti 1). Vendar že iz teh šibkejših predpostavk sledi, da so skoki s.g. velikosti 1 (bolj natančno, da ima množica trajektorij, na katerih obstaja skok velikosti 2 ali več, verjetnost 0). Vse preostale tri karakterizacije potem veljajo z dostavkom, da ima proces skoke skoraj gotovo velikosti 1.

DN: Pokaži, da je pri zgornjih predpostavkah dogodek, da ima proces skok velikosti 2 ali več na končnem intervalu $[0, t]$, za vsak $n \geq 1$ vsebovan v dogodku $\bigcup_{k=1}^n \{N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 2\}$ in s pomočjo tega dokaži zgornjo trditev.

- ▶ Verjetnost, da opazimo skok $HPP(\lambda)$ v točno danem časovnem trenutku s je enaka 0. Res, dogodek, da ima homogen Poissonov proces $(N_t)_{t \geq 0}$ skok v času $s > 0$ je unija dogodkov $\{S_n = s\}$, $n \geq 1$, ki pa imajo vsi verjetnost 0, saj je $S_n \stackrel{(d)}{=} \text{gamma}(n, \lambda)$ in ima gostoto.

Enostavna lastnost Markova

Homogeni Poissonov proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima *enostavno lastnost Markova*. Velja namreč naslednje.

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo λ in $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ njegova naravna filtracija. Potem je za vsak $t \geq 0$ proces

$$(\tilde{N}_s)_{s \geq 0} = (N_{t+s} - N_t)_{s \geq 0}$$

tudi homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ , neodvisen od $\mathcal{F}_t$.

Dokaz temelji na neodvisnosti prirastkov procesa $(N_t)_{t \geq 0}$, iz katere takoj sledi, da je za poljuben nabor $0 = t_0 < t_1 \dots t_m \leq t$ in $0 \leq s_0 < s_1 \dots < s_n$ vektor $(N_{t_1}, \dots, N_{t_m})$ neodvisen od vektorja $(\tilde{N}_{s_1}, \dots, \tilde{N}_{s_n})$. Trditev potem sledi s pomočjo Dynkinove leme.

Čas prvega skoka po času t

Kot takojšnjo uporabo enostavne lastnosti Markova si pogledjmo lastnosti S_{N_t+1} , to je časa prvega skoka po času t homogenega Poissonovega procesa $(N_t)_{t \geq 0}$ z intenzivnostjo λ . Ker ga lahko izrazimo kot

$$S_{N_t+1} = t + \inf\{s \geq 0; N_{t+s} - N_t \neq 0\},$$

sledi iz enostavne lastnosti Markova, da je $S_{N_t+1} - t \stackrel{(d)}{=} \text{Exp}(\lambda)$, pri čemer je S_{N_t+1} neodvisen od $\mathcal{F}_t$. V posebnem velja torej $\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = t + \frac{1}{\lambda}$.

Velja tudi, da je S_{N_t+1} čas ustavljanja glede na naravno filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ procesa $(N_t)_{t \geq 0}$. Res, za $s \leq t$ je $\{S_{N_t+1} \leq s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_s$. Za $s > t$ pa je

$$\{S_{N_t+1} \leq s\} = \{N_s - N_t \geq 1\} \in \mathcal{F}_s.$$

Krepka lastnost Markova

Homogeni Poissonov proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima tudi *krepko lastnost Markova*. Velja namreč naslednje.

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ homogeni Poissonov proces z intenzivnostjo λ in $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ njegova naravna filtracija. Potem je za vsak čas ustavljanja T glede na $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ proces

$$(\tilde{N}_s)_{s \geq 0} = (N_{T+s} - N_T)_{s \geq 0},$$

definiran na $\{T < \infty\}$ tudi, pogojno na $\{T < \infty\}$, homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ , neodvisen od $\mathcal{F}_T$.

Dokaz krepke lastnosti Markova je precej težji kot enostavne, zato ga na tem mestu opustimo. Uporablja pa lastnost, da so trajektorije zvezne z desne in da se da vsak čas ustavljanja T predstaviti kot limita padajočega zaporedja časov ustavljanja $T_n \downarrow T$, ki imajo diskretne zaloge vrednosti.

Čas zadnjega skoka do vključno časa t

Čas S_{N_t} zadnjega skoka do vključno časa t , ki je enak 0 na dogodku $\{N_t = 0\}$, lahko izrazimo kot

$$S_{N_t} = \inf\{0 \leq s \leq t; N_s = N_t\}$$

in ni čas ustavljanja glede na naravno filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Res, za $0 \leq s < t$ je

$$\{S_{N_t} \leq s\} = \{N_t - N_s = 0\}$$

dogodek s strogo pozitivno verjetnostjo $e^{-\lambda(t-s)}$, ki ni vsebovan v $\mathcal{F}_s$. Je pa to tudi zelo očitno: ko se zgodi zadnji skok do časa t ne moremo vedeti, da je bil to res zadnji, ne da bi počakali do časa t . Mimogrede nam zgornji premislek da tudi porazdelitveno funkcijo za S_{N_t} , ki je

$$\mathbb{P}(S_{N_t} \leq s) = e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{1}_{\{0 \leq s \leq t\}} + \mathbb{1}_{\{s > t\}}, \quad s \in \mathbb{R},$$

torej ima nezveznost (skok) višine $e^{-\lambda t}$ pri $s = 0$.

Čas S_{N_t} ni čas ustavljanja, je pa očitno merljiv glede na $\mathcal{F}_t$. Čas S_{N_t+1} pa je, kot smo videli, čas ustavljanja. Z uporabo lastnosti Markova za $HPP(\lambda)$ smo videli še, da velja $S_{N_t+1} \stackrel{(d)}{=} t + \text{Exp}(\lambda)$, neodvisno od $\mathcal{F}_t$. V posebnem velja $\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = t + \lambda^{-1}$.

Poglejmo to še drugače:

Za zaporedje $(T_i)_{i \geq 1}$ medprihodnih časov je $N_t + 1$ čas ustavljanja glede na naravno diskretno filtracijo $\mathcal{G}_n = \sigma\{T_1, \dots, T_n\}$. Res, za vsak $n \geq 1$ velja (premisli!)

$$\{N_t + 1 = n\} =$$

$$\{T_1 \leq t, T_1 + T_2 \leq t, \dots, T_1 + \dots + T_{n-1} \leq t, T_1 + \dots + T_{n-1} + T_n > t\} \in \mathcal{G}_n.$$

D. N.: Premisli, zakaj N_t ni čas ustavljanja glede na $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$.

Sedaj lahko zapišemo (premisli!):

$$S_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} T_i, \quad S_{N_t+1} = \sum_{i=1}^{N_t+1} T_i$$

in za drugega uporabimo Waldovo identiteto, da dobimo

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t+1} T_i\right) =$$

$$\mathbb{E}(\text{Exp}(\lambda))\mathbb{E}(N_t + 1) = \lambda^{-1}(\lambda t + 1) = t + \lambda^{-1},$$

kjer smo upoštevali, da so T_i neodvisni in porazdeljeni eksponentno s parametrom λ , N_t pa Poissonovo s parametrom λt .

Domača naloga

1) Izračunali smo že, da je

$$\mathbb{P}(S_{N_t} \leq s) = \mathbb{P}(N_t - N_s = 0) = e^{-\lambda(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Izračunaj $\mathbb{E}(S_{N_t})$ in primerjaj s produktom $\mathbb{E}(N_t)\mathbb{E}(\text{Exp}(\lambda))$. Zakaj tu Waldova identiteta *ne* velja?

2) Za $c > 0$ naj bo $J_c := \inf\{t \geq 0 | t - S_{N_t} \geq c\}$ prvi hip, ko je od zadnjega skoka minilo vsaj c enot časa in $K_c = S_{N_{J_c}+1}$ čas prvega skoka po času J_c . Premisli, zakaj sta to časa ustavljanja za $(\mathcal{F}_t)$. Kaj še lahko poveš o njiju?

Izrazi K_c kot vsoto oblike $\sum_{i=1}^{\tau} T_i$, kjer je τ ustrezen čas ustavljanja za $(\mathcal{G}_i)$. S pomočjo Waldove identitete izračunaj $\mathbb{E}(K_c)$. Z uporabo krepke lastnosti Markova premisli, kako je porazdeljen $K_c - J_c$ in nato izračunaj še $\mathbb{E}(J_c)$. Ali dobiš rezultat v skladu z zgornjim premislekom?

Starost in presežek

Sedaj bomo za vsak $t \geq 0$ definirali dve izjemno pomembni slučajni spremenljivki, ki ju lahko obravnavamo pri vsakem procesu štetja:

- ▶ *Starost* $A_t = t - S_{N_t}$ je čas, ki je minil od zadnjega prihoda/skoka do vključno časa t pa do t .
- ▶ *Presežek* $E_t = S_{N_t+1} - t$ pa čas, ki mine od časa t do prvega prihoda/skoka po njem.

Starost A_t je očitno $\mathcal{F}_t$ -merljiva in $0 \leq A_t \leq t$ (premisli!), presežek pa je odvisen od (v času t neznanega) nadaljnjega razvoja procesa. (Predstavljajte si, da pridete na postajo LPP in vprašate prodajalca v trafiki, ki že od jutra spremlja prihode avtobusov, koliko časa je minilo od zadnje šestice in koliko bom čakal na naslednjo. Na katero vprašanje vam lahko odgovori z gotovostjo in na katero ne?)

V primeru, ko je (N_t) $HPP(\lambda)$ nam enostavna lastnost Markova pove, da velja:

- ▶ $E_t \stackrel{(d)}{=} \text{Exp}(\lambda)$ in neodvisen od $\mathcal{F}_t$, torej v posebnem tudi od A_t .
- ▶ Za $0 \leq s < t$ je $\mathbb{P}(A_t > s) = \mathbb{P}(S_{N_t} < t - s) = e^{-\lambda s}$, za $s \geq t$ pa je $\mathbb{P}(A_t > s) = 0$, torej je $A_t \stackrel{(d)}{=} t \wedge \text{Exp}(\lambda)$ (premisli!).

Tako torej, če je proces (N_t) $HPP(\lambda)$, velja za slučajni vektor (A_t, E_t) naslednje:

$$(A_t, E_t) \stackrel{(d)}{=} (t \wedge U, V),$$

kjer sta U in V neodvisni in eksponentno porazdeljeni slučajni spremenljivki s parametrom λ .

V posebnem nam podatek o starosti pri $HPP(\lambda)$ nič ne pove o presežku!

Isti rezultat lahko dobimo tudi neposredno, brez sklicevanja na lastnost Markova, samo z upoštevanjem neodvisnosti prirastkov. Res, izračunajmo skupno preživetveno funkcijo $\mathbb{P}(A_t > x, E_t > y)$. najprej, za $0 \leq x < t$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_t > x, E_t > y) &= \mathbb{P}(N_t - N_{t-x} = 0, N_{t+y} - N_t = 0) = \\ &= \mathbb{P}(N_t - N_{t-x} = 0) \mathbb{P}(N_{t+y} - N_t = 0) = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}.\end{aligned}$$

Za $x \geq t$ pa je seveda $\mathbb{P}(A_t > x, E_t > y) = 0 = 0e^{-\lambda y}$. Tako vidimo, da je skupna preživetvena funkcija

$$\mathbb{P}(A_t > x, E_t > y) = e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{0 \leq x < t\}} e^{-\lambda y}$$

produkt funkcije spremenljivke x in funkcije spremenljivke y , iz česar takoj sledi neodvisnost, pa tudi robni porazdelitvi:

$$A_t \stackrel{(d)}{=} t \wedge \text{Exp}(\lambda), \quad E_t \stackrel{(d)}{=} \text{Exp}(\lambda).$$

Na tem mestu bi lahko kdo (in bi skoraj moral!) protestiral: Ampak podatek, da že dolgo ni bilo šestice mi nakazuje, da bo naslednja prišla kmalu! Res, a to samo pomeni, da morda homogeni Poissonov proces ni najprimernejši model za štetje prihodov avtobusov LPP na dano postajo. Če pa za model uporabljamo homogeni Poissonov proces, moramo pač to vzeti v zakup.

Paradoks pregleda

Sedaj definirajmo še slučajno spremenljivko:

$$L_t := A_t + E_t = S_{N_t+1} - S_{N_t} = T_{N_t+1},$$

ki je dolžina medprihodnega časa, ki zaobjema čas t .

Za njo velja, z upoštevanjem Lebesgueovega izreka o monotni konvergenci in prejšnjih ugotovitev:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(L_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (A_t + E_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t \wedge \text{Exp}(\lambda)) + \lambda^{-1} =$$

$$\mathbb{E}(\lim_{t \rightarrow \infty} t \wedge \text{Exp}(\lambda)) + \lambda^{-1} = 2\lambda^{-1}.$$

Tako vidimo, da je T_{N_t+1} v povprečju "daljši" kot medprihodni časi T_i , v limiti celo dvakrat daljši. temu fenomenu rečemo paradoks pregleda (ki velja bolj splošno). V ozadju je dejstvo, da je T_{N_t+1} res eden od medprihodnih časov, ampak izbran na nek poseben način, ki vpliva na to, da je njegova porazdelitev daljša.

D. N.: 1) Premisli, zakaj pri $HPP(\lambda)$ nujno velja $\mathbb{E}(T_{N_t+1}) > \lambda^{-1}$, brez sklicevanja na starost in presežek.

2) Eksplicitno izračunaj porazdelitveno (ali preživetveno) funkcijo za L_t . Pomagaj si s skupno porazdelitvijo za (A_t, E_t) , ki smo jo izračunali. Upoštevaj, da bo rezultat zlepek elementarnih funkcij! Izračunaj še $\mathbb{E}(L_t)$.

3) Izračunaj $\mathbb{E}(S_2|N_t \geq 3)$ in $\mathbb{E}(S_4 - S_3|N_t = 3)$.

Markiranje Poissonovega procesa

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ in $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih d -razsežnih slučajnih vektorjev s skupnim zakonom (porazdelitvijo) μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (t.j. za Borelovo merljivo množico $A \subset \mathbb{R}^d$ je $\mu(A) = \mathbb{P}(X_i \in A)$). Predpostavimo še, da je to zaporedje neodvisno od procesa (N_t) .

Zaporedje $(S_i, X_i)_{i \geq 1}$, kjer so S_i časi skokov $HPP(\lambda)$, imenujemo *markiranje* homogenega Poissonovega procesa z zaporedjem markacij (oznak) $(X_i)_{i \geq 1}$.

Intuitivno si to predstavljamo takole: ob vsakem skoku $HPP(\lambda)$ vzorčimo neodvisno iz dane porazdelitve μ in rezultat vzorčenja pripišemo času skoka. Rezultat $(S_i(\omega), X_i(\omega))$ je element $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$.

Naj bo sedaj $A \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ Borelovo merljiva in omejena v časovni komponenti, t.j, $A \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$ za nek $T > 0$. Definirajmo

$$N(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{(S_i, X_i) \in A\}},$$

ki je slučajna spremenljivka, ki prešteje, koliko markiranih parov (S_i, X_i) pade v množico A . Postavi se naravno vprašanje, kako je $N(A)$ porazdeljena. To in še več nam pove naslednji izrek o markiranju.

Izrek o markiranju Poissonovega procesa

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ homogen Poissonov proces in $(X_i)_{i \geq 0}$ zaporedje d -razsežnih markacij s skupnim zakonom μ na $\mathbb{R}$. Z ν označimo produktno mero na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, kjer je prvi faktor λ -večkratnik Lebesguove mere na $[0, \infty)$, drugi faktor pa zakon μ na $\mathbb{R}^d$, definirano z

$$\nu(ds, dx) = \lambda \mathbb{1}_{s > 0} ds \otimes d\mu(x),$$

(t.j., za produktno množico oblike $A = [a, b] \times C$, $0 \leq a < b$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, je $\nu(A) = \lambda(b - a)\mu(C)$).

Naj bodo $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ paroma disjunktne ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) Borelovo merljive množice, omejene v časovni komponenti ($A_i \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$, $\forall i$, za nek $T > 0$).

Potem velja, da je slučajni vektor

$$(N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_m))$$

vektor z neodvisnimi komponentami in

$$N(A_i) \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\nu(A_i)), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Dokaz izreka je precej tehničen in ga bom napisal posebej. Pogoji, da so množice A_i omejene v časovni komponenti je pomemben v dokazu, ker bomo dokazovali s pogojevanjem na število prihodov N_T do časa T , se pa da izrek potem posplošiti tudi na bolj splošen primer. Pogoji, da so množice paroma disjunktne ni omejujoč, saj lahko poljuben končen nabor množic vedno razstavimo na (morda večji) nabor paroma disjunktne.

Poglejmo pa si naslednji zgled: (N_t) je $HPP(\lambda)$ in (X_i) zaporedje markacij, ki so slučajne spremenljivke s skupno porazdelitveno funkcijo $F_X(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1$. Naj bo $A = \{(s, x) | 0 \leq s \leq 2, 0 \leq x \leq s\}$. (Skiciraj to množico!) Kako je porazdeljen $N(A)$?

Da odgovorimo na to vprašanje, moramo izračunati $\nu(A)$:

$$\nu(A) = \int_{[0,\infty) \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A \lambda ds \otimes d\mu(x) =$$

$$\int_{[0,2]} \left(\int_{[0,s]} dF(x) \right) \lambda ds = \lambda \left(\int_{[0,1]} (s^2) ds + \int_{[1,2]} 1 \cdot ds \right) =$$
$$\lambda(1/3 + 1) = 4\lambda/3.$$

Torej je $N(A) \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(4\lambda/3)$.

Domača naloga

1) Doma v R-u opravite naslednjo simulacijo:

- ▶ Simulirajte eno realizacijo $HPP(10)$ na intervalu $[0, 2]$;
- ▶ Njegove prihode markirajte z neodvisnimi $EZ[0, 1]$;
- ▶ Naj bosta $A_1 = \{(s, x) | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{2s - s^2}\}$,
 $A_2 = \{(s, t) | 1 \leq s \leq 2, 0 \leq x \leq 2 - s\}$.
- ▶ Koliko je v vaši simulaciji $N(A_1)$, $N(A_2)$. Rezultate posredujte preko spletne ankete.
- ▶ Kako sta porazdeljeni $N(A_1)$ in $N(A_2)$?

2) Posploši izrek o markiranju na primer, ko so

$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ paroma disjunktne in je $\nu(A_j) < \infty$,

$1 \leq j \leq m$. Namig: pri izračunu karakteristične funkcije si pomagaj z že dokazanim in LDK.

Redčenje Poissonovega procesa

Napor, ki smo ga vložili v dokaz izreka o markiranju, se nam bo sedaj bogato obrestoval pri obravnavi (Bernoullijevega) redčenja homogenega Poissonovega procesa. Situacija, ki jo obravnavamo je sledeča:

- ▶ $(N_t)_{t \geq 0}$ je $HPP(\lambda)$,
- ▶ $(X_i)_{i \geq 1}$ je zaporedje markacij zgornjega procesa, ki so porazdeljene Bernoullijevo s parametrom p .

Definirajmo:

$$N_t^1 = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_i \leq t, X_i = 1\}}, \quad N_t^0 = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_i \leq t, X_i = 0\}}, \quad t \geq 0.$$

Slučajna spremenljivka N_t^1 nam prešteje, koliko je bilo prihodov/skokov do časa t , ki so dobili oznako 1. Očitno je $N_t = N_t^0 + N_t^1$ za vsak $t \geq 0$. Velja pa še:

Izrek o redčenju Poissonovega procesa

Procesa $(N_t^1)_{t \geq 0}$ in $(N_t^0)_{t \geq 0}$ sta neodvisna homogena Poissonova procesa s parametroma $p\lambda$ in $(1-p)\lambda$.

Za dokaz se spomnimo, da je zakon μ Bernoullijeve slučajne spremenljivke na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sledeč:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & ; \{0, 1\} \subset A^c \\ p & ; 1 \in A, 0 \notin A \\ 1-p & ; 1 \notin A, 0 \in A \\ 1 & ; \{0, 1\} \subset A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

kar lahko krajše zapišemo kot

$$\mu = p\delta_{\{1\}} + (1-p)\delta_{\{0\}}.$$

Tu je $\delta_{\{a\}}$ Diracova mera, skoncentrirana v točki $a \in \mathbb{R}$.

Naj bo sedaj $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ delitev intervala $[0, t]$. Opazimo sledeče: $N_{t_i}^1 - N_{t_{i-1}}^1 = N(A_i^1)$, kjer je $A_i^1 = (t_{i-1}, t_i] \times \{1\}$ in podobno $N_{t_i}^0 - N_{t_{i-1}}^0 = N(A_i^0)$, kjer je $A_i^0 = (t_{i-1}, t_i] \times \{0\}$, $1 \leq i \leq k$. Po izreku o markiranju so vse te slučajne spremenljivke neodvisne. Pri tem je

$$N_{t_i}^1 - N_{t_{i-1}}^1 = N(A_i^1) \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\nu(A_i^1)),$$

kjer je

$$\nu(A_i^1) = \lambda ds \otimes d\mu(x)((t_{i-1}, t_i] \times \{1\}) = p\lambda(t_i - t_{i-1})$$

po definiciji produktne mere ν in enako za

$\nu(A_i^0) = (1 - p)\lambda(t_i - t_{i-1})$. Tako vidimo, da sta $(N_t^1)_{t \geq 0}$ in $(N_t^0)_{t \geq 0}$ vsak zase homogeni Poissonovi procesa z ustreznima intenzivnostima, ki sta tudi neodvisna, saj so poljubni prirastki prvega neodvisni od prirastkov drugega.

Tako smo videli, da lahko $HPP(\lambda)$ razcepimo na vsoto dveh procesov, ki sta neodvisna in vsak zase HPP z ustreznim parametrom. Izrek bi zlahka lahko formulirali tudi za markiranje s poljubno diskretno porazdeljenim zaporedjem markacij. Tako bi lahko $HPP(\lambda)$ dekomponirali na poljubno števno vsoto neodvisnih Poissonovih procesov. Za t fiksen je to dobro znano iz Verjetnosti 1.

D.N.

- ▶ Naj bo N Poissonova slučajna spremenljivka in $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje n.e.p. $Ber(p)$ slučajnih spremenljivk, neodvisno od N . Naj bo $N^1 = \sum_{i=1}^N X_i$ in $N^0 = \sum_{i=1}^N (1 - X_i)$. Spomočjo skupne rodovne funkcije (ali kako drugače) pokaži, da sta N^1 in N^2 neodvisni, $N^1 \stackrel{(d)}{=} Pois(p\lambda)$, $N^0 \stackrel{(d)}{=} Pois((1 - p)\lambda)$.

- ▶ Naj bo $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje n.e.p. $Ber(p)$ slučajnih spremenljivk. Naj bo $\tau^1 = \inf\{k | X_k = 1\}$ in $\tau^0 = \inf\{k | X_k = 0\}$ časa prvega uspeha oz. prvega neuspeha. Kako sta porazdeljena vsak zase? Kakšna je njuna skupna porazdelitev? Sta neodvisna?.
- ▶ Naj bo $(X)_{i \geq 1}$ kot zgoraj zaporedje markacij za HPP $(N_t)_{t \geq 0}$ in naj bosta $(N_t^1)_{t \geq 0}$ in $(N_t^0)_{t \geq 0}$ procesa, ki ju dobimo z redčenjem. Z S_1^1 in S_1^0 označimo časa prvih skokov. Izrazi ju kot naključni vsoti s pomočjo zaporedja $(T_i)_{i \geq 1}$ medprihodnih časov procesa (N_t) in slučajnih spremenljivk τ^1 in τ^0 . Direktno preveri (recimo z uporabo Laplaceove transformacije), da je $S_1^1 \stackrel{(d)}{=} \text{Exp}(p\lambda)$.
- ▶ Težje: Z uporabo skupne Laplaceove transformacije za (S_1^1, S_1^0) pokaži, da sta neodvisni.

Superpozicija Poissonovih procesov

Videli smo, da lahko z Bernoullijevim redčenjem razstavimo homogen Poissonov proces na vsoto dveh neodvisnih homogenih Poissonovih procesov, katerih intenzivnosti se seštejeta v intenzivnost prvotnega. Poglejmo si še obratno situacijo. Naj bosta torej $(N_t^0)_{t \geq 0}$ in $(N_t^1)_{t \geq 0}$ neodvisna homogena Poissonova procesa z intenzivnostima λ_0 in λ_1 . Definirajmo proces

$$N_t = N_t^0 + N_t^1, \quad t \geq 0.$$

Očitno velja (premisli!):

- ▶ Za vsak $t \geq 0$ je $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$, kjer je $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$.
- ▶ Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke.

Edino vprašanje, ki se zastavi, je, ali ima lahko proces $(N_t)_{t \geq 0}$ skoke velikosti 2. Odgovor je, da načeloma da, a verjetnost, da bosta obadva procesa N^0 in N^1 skočila istočasno (kar bi pomenili, da ima N skok velikosti 2), je enaka 0. Res, naj bo A dogodek, da ima N skok velikosti 2. Potem velja

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{i,j} \{S_i^0 = S_j^1\} \right) \leq \sum_{i,j} \mathbb{P}(S_i^0 = S_j^1),$$

kjer je S_i^0 čas i -tega skoka procesa N^0 in enako S_j^1 . Torej je dovolj, da pokažemo, da velja

$$\mathbb{P}(S_i^0 = S_j^1) = 0, \quad \forall i, j \geq 1.$$

Za dokaz slednjega opazimo naslednje. Slučajni vektor (S_i^0, S_j^1) je vektor z neodvisnima komponentama, pri čemer je

$S_i^0 \stackrel{(d)}{=} \text{gamma}(i, \lambda_0)$ in $S_j^1 \stackrel{(d)}{=} \text{gamma}(j, \lambda_1)$. V posebnem imata torej obedve komponenti absolutno zvezno porazdelitev z gostotama $p_0(x)$, $p_1(y)$, torej ima (S_i^0, S_j^1) gostoto $p(x, y) = p_0(x)p_1(y)$. Potem je

$$\mathbb{P}(S_i^0 = S_j^1) = \int_D p(x, y) dx dy ,$$

kjer je $D = \{(s, s) | s \geq 0\}$ diagonala prvega kvadranta. Le-ta pa ima Lebesguejevo mero 0, torej je ta integral enak 0.

Tako vidimo, da za naključna množico časov skokov procesa N velja

$$\{S_k(\omega) | \omega \in \Omega\} = \{S_i^0(\omega) | \omega \in \Omega\} \cup \{S_j^1(\omega) | \omega \in \Omega\},$$

kjer sta množici na desni skoraj gotovo disjunktni, saj sta disjunktni za vsak $\omega \notin A$. Zato lahko na komplementu množice A definiramo Bernoullijevo slučajno spremenljivko

$$X_k = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k = S_i^1\}},$$

ki nam odgovori na sledeče vprašanje. Ali je bil k -ti prihod/skok združenega procesa N povzročen s prihodom/skokom procesa N^1 ? (Premisli, zakaj v vsoti, s katero smo definirali X_k nastopi največ en neničelen sumand!) Zamislimo si, da je $X_k = g_k((N_t^0)_{t \geq 0}, (N_t^1)_{t \geq 0})$ za neko merljivo funkcijo g_k (na nekem ustreznem merljivem prostoru parov neodvisnih Poissonovih procesov).

Izrek o superpoziciji Poissonovih procesov

Združeni proces $(N_t)_{t \geq 0}$ je (do dogodka z verjetnostjo 0 natančno) homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, za katerega je zaporedje $(X_k)_{k \geq 1}$ markiranje z zaporedjem neodvisnih Bernoullijevih slučajnih spremenljivk s parametrom $p = \lambda_1/\lambda$.

V posebnem je torej $(X_k)_{k \geq 1}$ zaporedje n.e.p. $Ber(p)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki je *neodvisno* od procesa $(N_t)_{t \geq 0}$.

Za dokaz naj bo sedaj $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ nek pomožen verjetnostni prostor, na katerem obstaja homogen Poissonov proces $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ z intenzivnostjo $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ in zaporedje markacij $(\tilde{X}_k)_{k \geq 1}$, ki so porazdeljene Bernoullijevo s parametrom $p = \lambda_1/\lambda$.

Dokaz izreka o superpoziciji

Naj bosta $(\tilde{N}_t^0)_{t \geq 0}$ in $(\tilde{N}_t^1)_{t \geq 0}$ procesa, ki ju dobimo iz procesa $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ z redčenjem z $(\tilde{X}_k)_{k \geq 1}$. Po izreku o redčenju vemo, da sta neodvisna homogena Poissonova procesa z intenzivnostima $\lambda_0 = (1 - p)\lambda$ in $\lambda_1 = p\lambda$. Iz konstrukcije je očitno (premisli!), da je

$$g_k((\tilde{N}_t^0)_{t \geq 0}, (\tilde{N}_t^1)_{t \geq 0}) = \tilde{X}_k, \quad k \geq 1.$$

Ker velja (premisli!)

$$((N_t^0)_{t \geq 0}, (N_t^1)_{t \geq 0}) \stackrel{(d)}{=} ((\tilde{N}_t^0)_{t \geq 0}, (\tilde{N}_t^1)_{t \geq 0}),$$

velja posledično

$$((N_t)_{t \geq 0}, (X_k)_{k \geq 0}) \stackrel{(d)}{=} ((\tilde{N}_t)_{t \geq 0}, (\tilde{X}_k)_{k \geq 0}),$$

saj sta obedve strani dobljeni na enak (merljiv) način iz enako porazdeljenih procesov. S tem je izrek dokazan.

Dokaz izreka o superpoziciji je bil res precej abstrakten. Praktičen pomen pa je naslednji. Za namene modeliranja je povsem vseeno, ali si predstavljamo da redčimo nek homogen Poissonov proces (recimo vozila na cesti z oznakama motor in avto) ali pa si mislimo, da imamo dva neodvisna vira prihodov (recimo posebej motorje in posebej avte), če se le intenzivnosti in parameter redčenja ustrezno ujemajo.

Tudi izrek o superpoziciji se zlahka posploši na števni nabor neodvisnih homogenih Poissonovih procesov $(N_t^k)_{t \geq 0}$ za $k \in I \subset \mathbb{N}_0$, pod pogojem, da je vsota $\lambda = \sum_{k \in I} \lambda_k$ njihovih intenzivnosti končna. Potem je odgovor na vprašanje, iz katerega od procesov je prišel i -ti prihod S_i združenega procesa, slučajna spremenljivka X_i s porazdelitvijo $\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda}$. Zaporedje $(X_i)_{i \geq 1}$ je zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, neodvisno od združenega procesa $(\sum_{k \in I} N_t^k)_{t \geq 0}$, ki je $HPP(\lambda)$.

- ▶ Dokaži, da velja naslednje: če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki in ima ena (recimo X) zvezno porazdelitveno funkcijo (t.j. $\mathbb{P}(X = c) = 0, \forall c \in \mathbb{R}$), potem je $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
- ▶ Iz vesolja prihajajo delci alfa, beta in gama, vsak tip kot svoj HPP z ustreznim parametrom α, β, γ neodvisno. Naj bo J čas, ko prvič zaznate delec alfa po tem, ko ste že zaznali delca obeh drugih tipov. Kako je porazdeljen J . Kako je porazdeljeno skupno število delcev, ki jih zaznate do $\mathbb{E}(J)$. Kaj pa število delcev N_J , ki jih zaznate do časa J ? Koliko je $\mathbb{E}(N_J)$? Kaj pa število N_J^α delcev alfa, ki jih zaznate do časa J ? Koliko je $\mathbb{E}(N_J^\alpha)$?

- ▶ Denimo, da ste na poletni večer odprli okno sobe in vanjo letajo muhe in komarji, vsaka vrsta v skladu s svojim homogenim Poissonovim procesom s parametroma 4 in 6 (na uro). Denimo, da sta procesa neodvisna. Izračunaj pričakovani čas prileta prve muhe pri naslednjih pogojih:
 - ▶ a) Do časa 1 sta priletela točno dva komarja.
 - ▶ b) Do časa 1 sta priletela vsaj dva komarja.
 - ▶ c) Do časa 1 sta prileteli točno dve žuželki.
 - ▶ d) Do časa 1 sta prileteli vsaj dve žuželki.

Nehomogeni Poissonov proces

Kot smo videli, ima homogeni Poissonov proces številne lepe lastnosti (in še marsikatero, ki jih sploh nismo omenili), a pri praktični uporabi za namene modeliranja naletimo na problem. Predpostavka o časovni homogenosti, t. j., da na porazdelitev števila prihodov v danem časovnem oknu vpliva le dolžina le-tega, je smiselna za razne naravne pojave, ki se ne menijo za uro (potresi, prihodi gama žarkov, ipd.), ne pa za, recimo, klice na telefonsko centralo ali prilete letal na letališče, kjer je intenzivnost prihodov očitno odvisna ne le od dolžine časovnega okna, ampak tudi od tega, kje se to časovno okno nahaja in še česa. Najpreprostejši način, kako lahko upoštevamo (deterministično) spreminjanje intenzivnosti prihodov v odvisnosti od časa je prek vpeljave deterministične *spremembe časa ali ure*.

Spremeba ure

Naj bo $R: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ nepadajoča funkcija, zvezna z desne in z levimi limitami (predpostavimo še, zaradi enostavnosti, da je $R(x) = 0, x < 0$) in $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ homogen Poissonov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z intenzivnostjo 1. Definirajmo:

$$N_t = \tilde{N}_{R(t)}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Zlahka se prepričamo, da velja:

- ▶ proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne prirastke,
- ▶ za $0 \leq s < t$ je $N_t - N_s \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(R(t) - R(s))$.

Procesu $(N_t)_{t \geq 0}$ rečemo nehomogen Poissonov proces z *intenzivnostno mero* μ , kjer je μ σ -končna mera na $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, ki jo porodi R s predpisom $\mu([0, a]) = R(a) < \infty, a \geq 0$.¹ Ideja je, da je na obdobjih, ko R hitreje narašča, intenzivnost prihodov ustrezno večja.

¹Enako, kot porazdelitvena funkcija porodi verjetnostno mero. 

Definicija nehomogenega Poissonovega procesa z dano intenzivnostno mero

Konstrukcija s spremembo ure pove, da je torej naslednja definicija smiselna.

Naj bo μ mera na $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ z lastnostjo, da je $\mu([0, a]) < \infty$ za vse $a \geq 0$. Definirajmo $R(t) = \mu([0, t])$, $t \geq 0$, ki je nepadajoča funkcija zvezna z desne.

Procesu štetja $(N_t)_{t \geq 0}$, ki ima neodvisne prirastke in za katerega velja velja, da je za poljubna $0 \leq s < t$

$$N_t - N_s \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\mu((s, t])) = \text{Pois}(R(t) - R(s))$$

rečemo *nehomogeni Poissonov proces z intenzivnostno mero μ* .

Trenutna intenzivnost

V praktični uporabi je najbolj pomembna situacija, ko je μ absolutno zvezna glede na Lebesguovo mero m . Potem je po Radon-Nikodymovem izreku, $\frac{d\mu(s)}{dm(s)} = \rho(s)$, kjer je $\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, m)$ lokalno integrabilna (torej absolutno integrabilna na vsakem končnem intervalu). Očitno je $\rho \geq 0$ skoraj povsod.

V tem primeru je $R(t) = \int_0^t \rho(s)ds$ in za $0 \leq u < v$ je

$N_v - N_u \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\int_u^v \rho(s)ds)$. Funkcijo ρ imenujemo *trenutna intenzivnost* nehomogenega Poissonovega procesa.

Poseben primer, ko je $\rho(t) = \lambda > 0$ in $R(t) = \lambda t$, nas privede nazaj do $HPP(\lambda)$.

Intenzivnost prihodov je torej večja v obdobjih, ko so vrednosti trenutne intenzivnosti ρ večje.

Lastnosti nehomogenega Poissonovega procesa

Nehomogen Poissonov proces, kot smo ga definirali, ima še vedno neodvisne prirastke, torej ima (nehomogeno) latnost Markova: $(N_{t+s} - N_t)_{s \geq 0}$ je neodvisen od $\mathcal{F}_t$ in je nehomogen Poissonov proces z intenzivnostno mero, porojeno z $R_1(s) = R(t+s) - R(t)$, $s \geq 0$, oziroma trenutno intenzivnostjo $\rho_1(s) = \rho(t+s)$, $s \geq 0$, kadar le-ta obstaja.

Velja tudi krepka (nehomogena) lastnost Markova: Za čas ustavljanja T glede na naravno filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ je na dogodku $\{T < \infty\}$ proces $(N_{T+s} - N_T)_{s \geq 0}$, pogojno na $\mathcal{F}_T$, porazdeljen kot nehomogen Poissonov proces z intenzivnostno mero, ki jo rodi $R_1(s) = R(T+s) - R(T)$, oziroma trenutno intenzivnostjo $\rho_1(s) = \rho(T+s)$, kadar le-ta obstaja.

V posebnem to pomeni, da je nadaljni razvoj od časa T odvisen le od tega, kdaj se T zgodi, in nobenih drugih dogodkov do vključno T .

Časi prihodov

Pri nehomogenem Poissonovem procesu $(N_t)_{t \geq 0}$ se nam lahko zgodi, da intenzivnostna mera μ pripiše kakšni točki $t_0 \geq 0$ pozitivno mero $\mu(\{t_0\}) = R(t_0) - R(t_0-)$ (torej je t_0 točka nezveznosti za funkcijo R in $\mu(\{t_0\})$ točno višina skoka). V takem primeru imamo s pozitivno verjetnostjo tudi v procesu $(N_t)_{t \geq 0}$ v točki t_0 skok višine 2 ali več. Zatorej časov prihodov ne moremo enačiti s časi skokov in jih moramo definirati kot $S_0 = 0$ in

$$S_n = \inf\{t \geq 0 | N_t \geq n\}, \quad n \geq 1.$$

V primeru, ko ima proces trenutno intenzivnost ρ , se da videti, da ima proces $(N_t)_{t \geq 0}$ skoraj gotovo skoke velikosti 1 in $N_0 = 0$, kar pomeni da je ta proces tedaj skoraj gotovo enostavni proces štetja in časi skokov sovpadajo s časi prihodov, kot smo jih definirali zgoraj.

Lastnost vrstilnih statistik

Za nehomogen Poissonov proces $(N_t)_{t \geq 0}$ velja tudi lastnost vrstilnih statistik. Naj bo $0 \leq s < t$ in $R(t) - R(s) > 0$ (torej $\mu((s, t]) > 0$). Potem je, pogojno na $N_t - N_s = k$, $k \geq 1$, vektor časov prihodov

$$(S_{N_s+1}, S_{N_s+2}, \dots, S_{N_s+k})$$

porazdeljen kot vektor

$$(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(k)}) ,$$

kjer je vektor $(Y_1, \dots, Y_k)$ vektor neodvisnih enako porazdeljenih komponent in ima Y_i , $1 \leq i \leq k$, porazdelitev, podano z zakonom $\frac{1}{\mu((s, t])} d\mu(u)$ na $(s, t]$ (prepričaj se, da je to res verjetnostna porazdelitev!).

V primeru, ko obstaja trenutna intenzivnost ρ , se zgornje prevede na to, da imajo Y_i gostoto, podano z

$$\frac{1}{R(t) - R(s)} \rho(u) \mathbb{1}_{(s, t]}(u) du.$$

Dokaz lastnosti vrstilnih statistik

Za $k \geq 1$ in $s < s_1 \leq t_1 < s_2 \leq t_2 < \dots < s_k \leq t_k \leq t$ je

$$\mathbb{P}(s_1 < S_{N_s+1} \leq t_1, s_2 < S_{N_s+2} \leq t_2, \dots, s_k < S_{N_s+k} \leq t_k | N_t - N_s = k) =$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N_{s_1} - N_s = 0, N_{t_1} - N_{s_1} = 1, \dots, N_{s_k} - N_{t_{k-1}} = 0, N_{t_k} - N_{s_k} = 1 | N_t - N_s = k) \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_{s_1} - N_s = 0, N_{t_1} - N_{s_1} = 1, \dots, N_{t_k} - N_{s_k} = 1, N_t - N_{t_k} = 0)}{\mathbb{P}(N_t - N_s = k)}. \end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo neodvisnost prirastkov in njihove porazdelitve in nadaljujemo.

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{s_1} - N_s = 0) \mathbb{P}(N_{t_1} - N_{s_1} = 1) \dots \mathbb{P}(N_t - N_{t_k} = 0)}{\mathbb{P}(N_t - N_s = k)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\mu((s,s_1])} \mu((s_1, t_1]) e^{-\mu(s_1, t_1]} \dots \mu((s_k, t_k]) e^{-\mu((s_k, t_k])} e^{-\mu((t_k, t])}}{(\mu((s, t]))^k (e^{-\mu((s, t])} / k!)} = \\
&= \frac{k!}{(\mu(s, t])^k} \prod_{i=1}^k \mu((s_i, t_i]) ,
\end{aligned}$$

to pa je točno enako

$$\mathbb{P}(s_1 < Y_{(1)} \leq t_1, s_2 < Y_{(2)} \leq t_2, \dots, s_k < Y_{(k)} \leq t_k)$$

za vektor $(Y_1, \dots, Y_k)$ z neodvisnimi enako porazdeljenimi komponentami, $Y_i \stackrel{(d)}{=} \frac{d\mu}{\mu((s, t])}$ na $(s, t]$ (Premisli!).

Tako vidimo, da se pogojna porazdelitev za $(S_{N_s+1}, \dots, S_{N_s+k})$ in porazdelitev vektorja $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(k)})$ ujemata na družini merljivih množic $\mathcal{U}$ oblike

$$U = (s_1, t_1] \times (s_2, t_2] \times \dots \times (s_k, t_k], \quad s < s_1 \leq t_1 < \dots < s_k \leq t_k \leq t.$$

Družina $\mathcal{U}$ je zaprta za končne preseke (preveri!) in generira Borelovo σ -algebro na

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid s < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq t\},$$

torej je π -sistem. Potem se lahko skličemo na Dynkinovo lemo, ki pravi, da če se dve (verjetnostni) meri ujemata na π -sistemu merljivih množic ki generira σ -algebro, se ujemata na celi σ -algebri, s čimer je izrek dokazan.

- 1) Premisli, da $\mathcal{U}$ zares generira Borelovo σ -algebro na V .
- 2) Naj bo $\rho(t) = c(1+t)^{-1}, c > 0$. Določi preživetveno funkcijo za S_1 . Pri kakšnem pogoju na c bo obstajal $\mathbb{E}(S_1^k)$, $k \geq 1$.
- 3) Za ρ kot zgoraj in $c = 1$, izračunaj: a) Pogojno preživetveno funkcijo za $T_2 = S_2 - S_1$, pogojno na T_1 . b) Brezpogojno preživetveno funkcijo za T_2 .
- 4) Na podlagi rezultatov premisli: Ali so v splošnem medprihodni časi nehomogenega Poissonovega procesa neodvisni? Ali so v splošnem enako porazdeljeni.
- 5) Pri $\rho(t) = t^2$, izračunaj $\mathbb{E}(S_1 | N_t = 2)$, $t > 0$.

Še nekaj lastnosti nehomogenega Poissonovega procesa

Videli smo, da tudi za nehomogen Poissonov proces velja lastnost vrstilnih statistik. Kdor je rešil domačo nalogo, se je sam prepričal, da *ne velja* lastnost medprihodnih časov, torej da so v splošnem medprihodni časi odvisni in niso enako porazdeljeni. Vprašamo se pa lahko še, kako je z infinitezimalno karakterizacijo nehomogenih Poissonovih procesov, torej s karakterizacijo, kjer bi v principu zahtevali le neko približno ujemanje $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1)$ oz.

$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2)$ s kakima količinama, ko gre $h \downarrow 0$.

V splošnem je to problematično. Funkcija $R(t)$ ni nujno zvezna, in če ima skok velikosti δ_i v točki t_i , potem velja (premisli!), da ima v tej točki proces skok višine 2 ali več s pozitivno verjetnostjo.

Še več, potem velja: če z $N_{t_i-} = \lim_{t \uparrow t_i} N_t$ označimo levo limito trajektorij procesa v točki t_i , potem je

$$N_{t_i} - N_{t_i-} \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(R(t_i) - R(t_i-)) = \text{Pois}(\delta_i) = \text{Pois}(\mu(\{t_i\})).$$

Tudi če predpostavimo, da je funkcija $R(t)$ zvezna, še vedno lahko pride do patologije, da je sicer verjetnost skoka v posamezni konkretni točki enaka 0 prav tako, kot verjetnost skokov velikosti 2 ali več, ampak so lahko skoki z neko pozitivno verjetostjo skoncentrirani na množici z Lebesguovo mero nič (pomislite na "hudičeve stopnice", ki so zvezna porazdelitvena funkcija, ki pa ima odvod skoraj povsod enak nič (na komplementu Kantorjeve množice), torej nimajo gostote). Zato je predpostavka, da je $R(t)$ integral svojega odvoda oz. da je mera μ absolutno zvezna glede na Lebesguovo mero pomembna, saj nam prepreči take patološke pojave.

Infinitezimalna karakterizacija nehomogenega Poissonovega procesa

A če hočemo začeti z infinitezimalno karakterizacijo, potrebujemo še dodatne predpostavke. Ker bi bil izrek v najširši splošnosti prezahteven, povejmo malo bolj restriktivno verzijo, pri kateri funkcija trenutne intenzivnosti ni le lokalno L^1 , ampak zvezna. Tudi v tem primeru je dokaz zelo tehničen in ga bom napisal posebej. Predpostavimo torej, da imamo proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$ in zvezno funkcijo $\rho: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Naj velja, da ima proces neodvisne prirastke, $N_0 = 0$, skoke velikosti ena in za vsak $t \geq 0$ velja

- ▶ $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \rho(t)h + o_t^1(h),$
- ▶ $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o_t^2(h),$

pri čemer je $\lim_{h \downarrow 0} \frac{o_t^i(h)}{h} = 0$ enakomerno po t za vse t na vsakem končnem intervalu $[0, T]$, $i = 1, 2$.

Potem za vsak $0 \leq s \leq t$ velja $N_t - N_s \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(R(t) - R(s))$, kjer je $R(t) = \int_0^t \rho(u) du$.

Kot rečeno, bom dokaz napisal posebej. Tu pa si pogledjmo, da če ima nehomogen Poissonov proces *zvezno* trenutno intenzivnost ρ , je zadoščeno zgornjima pogoju. Res, vemo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) &= (R(t+h) - R(t))e^{-(R(t+h)-R(t))} = \\ &= \rho(t)h + (R(t+h) - R(t) - \rho(t)h) + (R(t+h) - R(t))(e^{-(R(t+h)-R(t))} - 1).\end{aligned}$$

Za drugi sumand opazimo, z uporabo Lagrangevega izreka,

$$|R(t+h) - R(t) - \rho(t)h| = |\rho(\xi) - \rho(t)|h, \quad \text{za nek } \xi \in [t, t+h].$$

Ker je $\rho(u)$ zvezna, torej enakomerno zvezna na vsakem končnem intervalu, vidimo da ta izraz, ko ga delimo s h , postane poljubno majhen enakomerno po $t \in [0, T]$, $T \geq 0$, če je le h dovolj majhen.

Za tretji sumand pa opazimo, da velja $\lim_{h \downarrow 0} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} = \rho(t)$, pri čemer je $\rho(t)$ omejena na vsakem končnem intervalu zaradi zveznosti, za drugi faktor pa je $\lim_{h \downarrow 0} (e^{-(R(t+h) - R(t))} - 1) = 0$, spet enakomerno po $t \in [0, T]$ zaradi enakomerne zveznosti eksponentne funkcije na vsakem končnem intervalu in dejstva, da $R(t+h) - R(t)$ konvergira proti 0 enakomerno za $t \in [0, T]$. Ker je $R(t+h) - R(t) \leq c_T h$, $0 \leq t \leq T$, za neko konstanto c_T , odvisno le od T , sledi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) &= \mathbb{P}(\text{Pois}(R(t+h) - R(t)) \geq 2) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(\text{Pois}(c_T h) \geq 2) = o(h), \end{aligned}$$

neodvisno od $t \in [0, T]$, s čimer smo trditev preverili.

Opomba: Tu smo uporabili dejstvo, da je funkcija $\lambda \mapsto \mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda) \geq 2)$, $\lambda \geq 0$, strogo monotono naraščajoča.

Zgled, kaj gre lahko narobe, če ni enakomernosti

Zakaj je potrebno “komplicirati” z enakomernostjo pokaže naslednji zgled: Naj bo $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ $HPP(\lambda)$ in $\lfloor \cdot \rfloor$ funkcija celi del. Definirajmo

$$N_t = \tilde{N}_t + \lfloor t \rfloor, \quad t \geq 0.$$

To je proces, ko prihodom običajnega $HPP(\lambda)$ dodamo še deterministični prihod ob časih $t = 1, 2, \dots$. Opazimo: $(N_t)_{t \geq 0}$ ni Poissonov proces, saj, recimo, $N_1 - N_0$ nima Poissonove porazdelitve (premisli!), in prirastki *niso* stacionarni (premisli, da $N_{1/2} - N_0$ in $N_1 - N_{1/2}$ nimata enake porazdelitve!). Kljub temu pa za $\rho(t) = \lambda$ velja

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o_1^t(h) \quad \text{in}$$

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o_2^t(h),$$

samo ne *enakomerno*, recimo na $[0, 1]$. Res, da bo postala razlika $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t) - \lambda h$ razreda $o(h)$ je bistveno, kako blizu 1 je točka t (premisli!).

Konstrukcija z redčenjem spremenljivke

Še ena možna konstrukcija nehomogenega Poissonovega procesa je z redčenjem spremenljivke. Ta način deluje, kadar je funkcija trenutne intenzivnosti navzgor omejena z neko konstanto $c > 0$, torej $\sup_{t \geq 0} \rho(t) \leq c$. Naj bo $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ $HPP(c)$ in $(\tilde{X}_i)_{i \geq 1}$ zaporedje njegovih markacij, ki so n.e.p. $EZ[0, 1]$. Potem je proces, ki ga dobimo z *redčenjem spremenljivke* definiran kot

$$N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{\tilde{S}_k \leq t, c\tilde{X}_k \leq \rho(\tilde{S}_k)\}}, \quad t \geq 0,$$

to je, pri k -tem prihodu procesa $\tilde{N}$ izžrebamo (n.e.p) markacijo $\tilde{X}_k$ in pogledamo, če je vrednost $c\tilde{X}_k$ manjša od vrednosti funkcije ρ v trenutku prihoda. Če da, prihod štejemo, sicer pa ne (odtod redčenje).

Da ima tako definiran proces $(N_t)_{t \geq 0}$ vse zahtevane lastnosti nehomogenega Poissonovega procesa s trenutno intenzivnostjo ρ je potem takojšnja posledica izreka o markiranju, o čemer se prepričajte sami (D.N.).

Univerzalnost konstrukcije s spremembo ure

Videli smo, da nehomogen Poissonov proces z dano intenzivnostno mero μ lahko skonstruiramo s spremembo ure iz homogenega z intenzivnostjo 1. V primeru, ko je funkcija trenutne intenzivnosti ρ zvezna, zadošča tudi infinitezimalni karakterizaciji. Vprašanje, ki se zastavi, pa je sledeče. Ali je vsak nehomogen Poissonov proces z dano intenzivnostno mero dobljen iz homogenega s spremembo ure? Odgovor je da, vsaj v primeru ko je $R(0) = 0$ in je funkcija $R(t)$ strogo zvezna naraščajoča zvezna funkcija.

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ nehomogen Poissonov proces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z intenzivnostno mero μ . Denimo, da je $R(t) = \mu([0, t])$ strogo naraščajoča zvezna funkcija in $R(0) = 0$. Potem na morda razširjenem verjetnostnem prostoru $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ obstaja homogen Poissonov proces $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ z intenzivnostjo 1, da velja

$$N_t = \tilde{N}_{R(t)}, \quad t \geq 0.$$

V dokazu najprej privzemimo, da velja še $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$. V tem primeru je $R: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ obrnljiva funkcija. Naj bo $A: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ njen inverz. Definirajmo

$$\tilde{N}_s = N_{A(s)}, \quad s \geq 0.$$

Zlahka se prepričamo, da ima $\tilde{N}$ neodvisne prirastke. Po predpostavkah je $\tilde{N}_0 = 0$. Ker velja še

$$\tilde{N}_{t+s} - \tilde{N}_t = N_{A(t+s)} - N_{A(t)} \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(R(A(t+s)) - R(A(t))) = \text{Pois}(s),$$

vidimo, da so prirastki stacionarni. Proces $\tilde{N}$ je torej $HPP(1)$ (kjer so skoki skoraj gotovo velikosti 1) in velja $N_t = \tilde{N}_{R(t)}$, s čimer je ta primer dokazan.

Če pa velja $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = b < \infty$, potem najprej definirajmo

$$N_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} N_t,$$

kjer ta limita obstaja (s.g.) ker je proces N nepadajoč. Po Lebesguovem izreku o monotoni konvergenci je

$\mathbb{E}(N_\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_t) = b$, torej je N_∞ neizrojena slučajna spremenljivka, h kateri N_t konvergira skoraj gotovo.

Ker skoraj gotova konvergenca implicira konvergenco v porazdelitvi sledi $N_\infty \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(b)$. Ker je $R : [0, \infty) \rightarrow [0, b)$ obrnljiva funkcija naj bo, kot zgoraj A njen inverz. Obedve funkciji razširimo na $[0, \infty]$ oz. $[0, b]$ z očitnim predpisom $R(\infty) = b$, $A(b) = \infty$. Tako razširjeni funkciji sta še vedno inverzni.

Naj bo sedaj $(N_t^1)_{t \geq 0}$ nek, od $(N_t)_{t \geq 0}$ neodvisen homogen Poissonov proces z intenzivnostjo 1 (da zagotovimo njegov obstoj je morda potrebno razširiti originalni verjetnostni prostor).

Definirajmo

$$\tilde{N}_t = \begin{cases} N_{A(t)} & , 0 \leq t \leq b \\ N_\infty + N_{t-b}^1 & , t > b \end{cases} .$$

Zopet se zlahka prepričamo, da je $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ $HPP(1)$ in $N_t = \tilde{N}_{R(t)}$, $t \geq 0$, s čimer je trditev dokazana.

D.N.

1) Naj bosta N^1 in N^2 dva neodvisna homogena Poissonova procesa z enako intenzivnostjo λ in $b > 0$. Pokaži, da je proces

$$\tilde{N}_t = \begin{cases} N_t^1 & , 0 \leq t \leq b \\ N_b^1 + N_{t-b}^2 & , t > b \end{cases}$$

tudi $HPP(\lambda)$.

2) Naj bo N nehomogen Poissonov proces s trenutno intenzivnostjo ρ . Pri kakšnem pogoju na ρ je S_1 neizrojena sl. sp.? Denimo, da je S_1 izrojena, pri kakšnem pogoju na ρ velja $\mathbb{E}(S_1 | S_1 < \infty) < \infty$. Premisli za primera, ko je $\rho(t) = e^{-t}$ in $\rho(t) = (1+t)^{-2}$.

3) Naj bo N nehomogen Poissonov proces s trenutno intenzivnostjo ρ in $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje n.e.p slučajnih vektorjev s skupnim zakonom μ na $\mathbb{R}^d$. Za merljivo množico $A \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d$ definirajmo kot pri markiranju $N(A) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{(S_i, X_i) \in A\}}$. Kako je porazdeljena $N(A)$. Bi znal formulirati izrek o markiranju za nehomogene Poissonove procese?

4) Naj bo N nehomogen Poissonov proces s trenutno intenzivnostjo ρ . Za $t \geq 0$ definiramo starost $A_t = t - S_{N_t}$ in presežek $E_t = S_{N_t+1} - t$. Kakšna je njuna skupna porazdelitev?

5) *Dvojno stohastični modeli* Namesto deterministične spremembe ure, bi lahko imeli nek slučajni proces $R(t)$ z nepadajočimi, z desne zveznimi trajektorijami, neodvisen od homogenega Poissonovega procesa N z intenzivnostjo 1. Potem lahko študiramo dvojno stohastični proces $N_{R(t)}$, tipično prek pogojevanja na realizacijo R . Kot osnovni primer si pogledjmo preprost model A.O. zavarovanja. Načeloma so škodni dogodki, ki jih povzroči voznik, $HPP(\lambda)$. Ampak, ker zavarovalnica vašega λ *ne pozna*, predpostavi, da je to nenegativna slučajna spremenljivka Λ . Običajno se vzame $\Lambda \stackrel{(d)}{=} \text{gamma}(a, c)$, kjer sta parametra a in c odvisna od starosti, spola, ipd. Potem je napovedni proces škodnih dogodkov $N_{\Lambda t}$, $t \geq 0$. Po enem letu poznajo vašo zgodovino za to obdobje. Izračunaj aposteriorno porazdelitev Λ pri pogoju $N_{\Lambda 1} = k$. Primerjaj apriorno in aposteriorno napoved števila škodnih dogodkov v enem letu.

Prenovitveni procesi

Videli smo, da ima pri nehomogenih Poissonovih procesih večja fleksibilnost, ki jo pridobimo na račun tega, da postane trenutna intenzivnost odvisna od časa, svojo ceno: medprihodni časi v splošnem niso ne neodvisni ne enako porazdeljeni. V praksi pa so situacije, ko želimo obdržati ravno to lastnost. Recimo, pri modeliranju zanesljivosti naprav se običajno predpostavi, da ima nek pomemben sestavni del naključno življensko dobo. Ko pa ga zamenjamo, je življenska doba novega dela enako porazdeljena in neodvisna od življenske dobe zamenjanega dela. Proces, ki nam šteje, kolikokrat smo zamenjali tak del do vključno časa t je potem primer *prenovitvenega procesa*. Pri le-teh je edini vhodni podatek porazdelitev medprihodnih časov. Če so ti porazdeljeni eksponentno, je proces HPP, v splošnem pa ne.

Definicija in osnovne lastnosti

Formalno imamo torej pri prenovitvenem procesu dano zaporedje $(T_i)_{i \geq 1}$ neodvisnih in enako porazdeljenih *nenegativnih* slučajnih spremenljivk. Z F bomo označevali njihovo skupno porazdelitveno funkcijo, s T pa generično slučajno spremenljivko s porazdelitveno funkcijo F . Predpostavke so:

- ▶ $F(0) = \mathbb{P}(T = 0) < 1$ (sl. sp. T_i niso skoraj gotovo enake 0),
- ▶ $\mu = \mathbb{E}(T) = \int_{[0, \infty)} x dF(x) \leq \infty$ označuje pričakovan medprihodni čas, pri čemer dopuščamo $\mu = \infty$. Velja pa $\mu > 0$ (premisli!).

Definiramo *zaporedne čase prihodov* ali *prenovitvene trenutke*

$$S_0 = 0; \quad S_k = \sum_{i=1}^k T_i, \quad k \geq 1.$$

Potem je prenovitveni proces $(N_t)_{t \geq 0}$ definiran z

$$N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}} = \sup\{k | S_k \leq t\}.$$

Še enkrat vidimo, da je porazdelitvena funkcija F , ki ji rečemo *medprihodna porazdelitev*, edini vhodni podatek, ki določa prenovitveni proces. Potrebno je biti pozoren na naslednje:

- ▶ $F(x) = 0, x < 0$.
- ▶ Čas k -tega prihoda S_k ni nujno tudi čas k -tega skoka! Res, če je $F(0) > 0$, potem medprihodni časi z neko pozitivno verjetnostjo pokažejo vrednost 0, torej se lahko več prihodov akumulira v danem času in dobimo skok velikosti 2 ali več (in zato ustrezno manj skokov kot prihodov).

Poglejmo si, kako je porazdeljen N_0 :

$$\mathbb{P}(N_0 = k) = \mathbb{P}(S_k = 0, S_{k+1} > 0) =$$

$$= \mathbb{P}(T_1 + \dots + T_k = 0, T_{k+1} > 0) = F(0)^k (1 - F(0)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

torej $N_0 \stackrel{(d)}{=} \text{geom}(1 - F(0)) - 1$. V posebnem, če je $F(0) = 0$, potem je $N_0 = 0$ s.g.

Osnovne lastnosti prenovitvenih procesov

Prenovitveni proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima naslednje lastnosti.

- ▶ Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ je nepadajoč in zvezen z desne (premisli!).
- ▶ $\mathbb{P}(N_t = \infty) = \mathbb{P}(S_k \leq t, \forall k \geq 1) = 0$ za vsak $t \geq 0$. Res, ker je $F(0) < 1$, obstaja $\alpha > 0$ tak, da je $\mathbb{P}(T_i > \alpha) > 0$ (zaradi zveznosti F z desne). Po drugi Borel-Cantellijevi lemi obstaja skoraj gotovo neskončno takih i , da je $T_i > \alpha$, kar pomeni da je skoraj gotovo $S_k \leq t$ le za končno mnogo k . Z drugimi besedami, verjetnost eksplozije (akumulacije skokov v času) je 0.
- ▶ Na $\{t \geq S_k\}$ je $N_t \geq k$.
- ▶ Ker je skoraj gotovo $S_k < \infty$ za vsak k , je torej $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty$ s.g.

Vidimo, da na dogodku z verjetnostjo 1 proces $(N_t)_{t \geq 0}$ zadošča zahtevam procesa štetja.

Še nekaj opomb v zvezi s procesom $(N_t)_{t \geq 0}$

Porazdelitev procesa $(N_t)_{t \geq 0}$, t.j., povedati za vsak nabor $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$ časovnih točk in $n_0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$ vrednosti v $\mathbb{N}_0$, koliko je $\mathbb{P}(N_{t_0} = n_0, N_{t_1} = n_1, \dots, N_{t_k} = n_k)$, je dana le implicitno preko verjetnosti istega dogodka, izraženega s pomočjo S_k , $k \geq 0$, in se v splošnem, razen v izjemnih primerih, ne da izraziti eksplicitno. Zato nas v resnici v prenovitveni teoriji zanima predvsem asimptotsko vedenje na dolgi rok.

V splošnem ločimo dva tipa prenovitvenih procesov, glede na to, ali je porazdelitev za T *aritmetična* ali ne. Po definiciji ima T *aritmetično* porazdelitev, če obstaja tak $a > 0$, da velja $\mathbb{P}(T \in \mathbb{Z}a) = 1$, torej T pokaže le večkratnike nekega danega števila. V tem primeru obstaja največje število a_0 s to lastnostjo, ki mu rečemo razpon (angl. “span”) porazdelitve T (premisli!). Le-ta primer se zlahka prevede na primer, ko je $a_0 = 1$. Obravnava aritmetičnih prenovitvenih procesov je lažja in bolj elementarna. Nas bo pa zanimal predvsem primer, ko medprihodni časi niso aritmetični.

- ▶ Naj bo N_t prenovitveni proces z medprihodno porazdelitvijo F in naj bo $F(0) > 0$. Naj bo $J_0 = 0 < J_1 < J_2 < \dots$ zaporedje časov skokov. Premisli, kakšna je porazdelitev za $K_i = J_i - J_{i-1}$. Kakšna je skupna porazdelitev zaporedja K_i . Kakšen je proces $M_t = \sup\{k | J_k \leq t\}$, $t \geq 0$. Kakšna je povezava med tem procesom in originalnim procesom.
- ▶ Naj bo sedaj $F(x) = 1/3 + 2/3(1 - e^{-\lambda x})$, $x \geq 0$. Izračunaj $\mathbb{P}(N_1 = 3)$. Pomagaj si z zgornjim premislekom.
- ▶ Naj bo $T \stackrel{(d)}{=} \alpha \text{Ber}(p)$ za nek $\alpha > 0$ (torej bo $(N_t)_{t \geq 0}$ aritmetičen prenovitveni proces). Izračunaj $\mathbb{P}(N_{k\alpha} = m)$ oz. porazdelitev $N_{k\alpha}$. Začni z N_0 , N_α , $N_{2\alpha}$ in premisli vzorec.
- ▶ Izrazi $\mathbb{P}(N_{t_0} = n_0, N_{t_1} = n_1, \dots, N_{t_k} = n_k)$ s časi prihodov.
- ▶ Najdi primer diskretne porazdelitve, ki ni aritmetična.
- ▶ Kaj se zgodi v primeru, ko je $F(0) = 1$?

Prenovitvena mera ali prenovitvena funkcija

Najpomembnejša količina, ki jo študiramo pri prenovitvenih procesih je *prenovitvena mera* $M(t)$, definirana z

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t), \quad t \geq 0, \text{ in } M(t) = 0, \quad t < 0.$$

Njen obstoj in lastnosti so podane v naslednji trditvi. Še prej se spomnimo, da je k -ta *konvolucija* F^{k*} porazdelitvene funkcije F slučajne spremenljivke T definirana kot $F^{k*}(x) = \mathbb{P}(S_k \leq x)$, $k \geq 0$, kjer je $S_k = T_1 + \dots + T_k$ vsota k neodvisnih enako prorazdeljenih slučajnih spremenljivk s porazdelitveno funkcijo F . V posebnem je $F^{0*}(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ Heavisideova funkcija oz. porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke skoraj gotovo enake konstanti 0. Ker je $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$ velja rekurzivna zveza

$$F^{(k+1)*}(x) = \int_{\mathbb{R}} F^{k*}(x-s) dF(s).$$

V primeru nenegativnih slučajnih spremenljivk se vsi integrali prevedejo na integrale po $[0, \infty)$.

Lebesgue-Stieltjesev integral

Sploh bo v celotnem poglavju, namenjenem prenovitvenim procesom, igral pomembno vlogo *Lebesgue-Stieltjesev integral*. Glavna ideja je, da vsaka nepadajoča in z desne zvezna funkcija H porodi mero oz. zakon μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ s prepisom

$$\mu((a, b]) = H(b) - H(a) = \int_{(a, b]} dH(x),$$

ki ga potem lahko enolično razširimo na celo Borelovo σ -algebro. Tu je pa pomembno, da pazimo na rob integralskega območja, saj lahko zakon (mera) dH , ki pripada funkciji H (v posebnem primeru torej porazdelitveni funkciji F oz. slučajni spremenljivki T) dodeli kakšni točki pozitivno mero (kot na primeru Heavisideove funkcije), zato je razlika, ali integriramo po $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ ali (a, b) . Več o Lebesgue-Stieltjevem in Riemann-Stieltjevem integralu je napisano v materialih na spletni učilnici.

Lastnosti prenovitvene mere

Za prenovitveni proces $(N_t)_{t \geq 0}$ z medprihodno porazdelitvijo F velja naslednje.

- ▶ Za vsak $t \geq 0$ in $r \geq 0$ je $\mathbb{E}(N_t^r) < \infty$. V posebnem je $M(t)$ dobro definirana funkcija.
- ▶ Velja $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}(t)$. Pri tem je $M(t)$ nepadajoča in zvezna z desne. Velja še $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty$.
- ▶ Za Laplace-Stieltjesovo transformacijo $\hat{M}(s)$ prenovitvene mere M velja

$$\hat{M}(s) = \int_{[0, \infty)} e^{-sx} dM(x) = \frac{\hat{F}(s)}{1 - \hat{F}(s)}, \quad s \geq 0,$$

pri čemer je $\hat{F}(s) = \int_{[0, \infty)} e^{-sx} dF(x) = \mathbb{E}(e^{-sT})$

Laplace-Stieltjesova transformacija porazdelitvene funkcije F oziroma Laplaceova transformacija slučajne spremenljivke T .

Dokaz

Najprej dokažimo, da ima proces $(N_t)_{t \geq 1}$ vse momente. V ta namen naj bo $\alpha > 0$ tak, da je $P(T > \alpha) = 1 - F(\alpha) > 0$ (da tak α obstaja sledi iz predpostavke $F(0) < 1$ in zveznosti F z desne). Definirajmo zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih sl. spr. $\bar{T}_i = \alpha \mathbb{1}_{\{T_i > \alpha\}}$, potem $\bar{S}_0 = 0$, $\bar{S}_k = \sum_{i=1}^k \bar{T}_i$, $k \geq 1$ in končno še prenovitveni proces $\bar{N}_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{\bar{S}_k \leq t\}}$, $t \geq 0$. Opazimo (premisli!)

$$\bar{T}_i \leq T_i, \forall i \implies \bar{S}_k \leq S_k, \forall k \implies \bar{N}_t \geq N_t, \forall t \geq 0.$$

Zadnjo opazko bomo še nekajkrat uporabili in se jo splača izpostaviti z besedami. Če imamo dva prenovitvena procesa in ima drugi vedno krajše medprihodne čase, potem vedno našteje vsaj toliko prihodov, kot prvi.

Za dokaz prve trditve je torej dovolj dokazati $\mathbb{E}(\bar{N}_t^r) < \infty$, $t \geq 0$. Pri tem je proces $(\bar{N}_t)_{t \geq 0}$ aritmetični prenovitveni proces z medprihodno porazdelitvijo $\alpha \text{Ber}(p)$, kjer je $p = \mathbb{P}(T > \alpha)$.

Definirajmo $\tau_1 = \inf\{k > 0 \mid \bar{T}_k = \alpha\}$, $\tau_2 = \inf\{k > \tau_1 \mid \bar{T}_k = \alpha\}$ in induktivno $\tau_{j+1} = \inf\{k > \tau_j \mid \bar{T}_k = \alpha\}$. Iz Verjetnosti 1 se spomnimo, da je τ_j čas j -tega uspeha v zaporedju neodvisnih Bernoullijevih poskusov in velja $\tau_j \stackrel{(d)}{=} \text{Pas}(j, p)$. Krepka lastnost Markova za le-to zaporedje še pove, da je $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_{j+1} - \tau_j, \dots$ zaporedje neodvisnih enako $\text{geom}(p)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk. V posebnem velja, da imajo τ_j vse momente. Sedaj opazimo (primerjaj z D.N.)

$$\bar{S}_{\tau_j} = j\alpha \text{ na dogodku } \{\tau_j < \infty\}, \mathbb{P}(\tau_j < \infty) = 1,$$

iz česar sledi $N_{j\alpha} \leq \bar{N}_{j\alpha} \leq \tau_{j+1}$ (ker je $\bar{S}_{\tau_{j+1}} > j\alpha$). Ker je proces N nepadajoč, je torej $\mathbb{E}(N'_t) \leq \mathbb{E}(\tau'_j)$ za $j\alpha \geq t$, s čimer je prva trditev dokazana.

Da je $M(t)$, ki sedaj vemo, da dobro definirana (končna) funkcija, zvezna z desne sledi iz zveznosti trajektorij z desne in izreka o dominirani/monotoni konvergenci. Prav tako iz izreka o monotoni konvergenci sledi $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty$ (premisli!).

Sedaj izračunamo z uporabo izreka o monotoni konvergenci

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}\right) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k \leq t) = \sum_{k \geq 1} F^{k*}(t)$$

po definiciji k -te konvolucije.

Za zadnjo trditev najprej predpostavimo $s > 0$. Potem je

$$\begin{aligned}\hat{M}(s) &= \int_{[0, \infty)} e^{-sx} dM(x) = \int_{[0, \infty)} e^{-sx} d\left(\sum_{k \geq 1} F^{k*}(x)\right) = \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_{[0, \infty)} e^{-sx} dF^{k*}(x) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(e^{-sS_k}) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(e^{-sT})^k = \\ &= \frac{\mathbb{E}(e^{-sT})}{1 - \mathbb{E}(e^{-sT})} = \frac{\hat{F}(s)}{1 - \hat{F}(s)},\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je mera, porojena iz lokalno konvergentne vsote nepadajočih funkcij, vsota pripadajočih mer, integral nenegativne funkcije glede na vsoto mer vsota integralov, neodvisnost in enako porazdeljenost medprihodnih časov in dejstvo, da je $\hat{F}(s) < 1$ za $s > 0$. Za $s = 0$ pa sta obedve strani ∞ (premisli!).

Elementarni prenovitveni izrek

Karakterizacija $M(t) = \sum_{k \geq 1} F^{k*}(t)$ je pomembna za teorijo, za konkretni izračun $M(t)$ pri dani F pa ni prav uporabna, saj je, razen v nekaj izjemnih primerih, praktično nemogoče izračunati F^{k*} , za vse $k \geq 2$. Z uporabo tabel Laplace-Stieltjesove transformacije in njenega inverza se da za nekaj primerov eksplicitno izračunati $M(t)$, v splošnem pa tudi ta metoda odpove. Zato nas tudi v primeru prenovitvene mere zanima asimptotsko vedenje na dolgi rok. Osnovno dejstvo je tu *elementarni prenovitveni izrek*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mathbb{E}(T)} \in [0, \infty).$$

Dokazali ga bomo z uporabo Waldove identitete.

Dokaz elementarnega prenovitvenega izreka

Najprej predpostavimo, da je $\mu = \mathbb{E}(T) < \infty$. Za $t \geq 0$ velja s.g.

$$S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1},$$

pri čemer je $N_t + 1 = \inf\{k | S_k > t\}$ čas ustavljanja za naravno filtracijo zaporedja $(T_i)_{i \geq 1}$, N_t pa v splošnem ne (premisli!). Tako z uporabo Waldove identitete in dejstva, da je $\mathbb{E}(N_t) = M(t) < \infty$ in $\mu < \infty$ dobimo

$$\mathbb{E}(S_{N_t}) \leq t \leq \mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t+1} T_i\right) = \mathbb{E}(N_t+1)\mu = \mu(M(t)+1).$$

Če sedaj delimo zgornjo neenakost z μt , dobimo

$$\frac{1}{\mu} \leq \frac{M(t)}{t} + \frac{1}{t}$$

iz česar sledi (premisli!)

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}.$$

Opozarjam, da zaenkrat ne moremo govoriti o limiti, saj še ne vemo, ali $M(t)/t$ konvergira. V primeru $\mu = \infty$ pa trivialno velja $\liminf_{t \rightarrow \infty} M(t)/t \geq 0 = 1/\mu$, saj je $M(t)/t \geq 0$ za vse t . Sedaj bi radi naredili še oceno v drugo smer. Ker pa N_t ni čas ustavljanja, ne moremo direktno uporabiti prve neenakosti, zato si pomagamo z novim prenovitvenim procesom $(\bar{N}_t)_{t \geq 0}$, ki ga pri izbranem $c > 0$ definiramo z:

$$\bar{T}_i = T_i \wedge c; \quad \bar{S}_k = \sum_{i=1}^k \bar{T}_i; \quad \bar{N}_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{\bar{S}_k \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

Kot smo se že prepričali, iz dejstva $\bar{T}_i \leq T_i, \forall i$, sledi $\bar{N}_t \geq N_t$, in, posledično, $\bar{M}(t) = \mathbb{E}(\bar{N}_t) \geq M(t), \forall t \geq 0$. Ker so medprihodni časi $\bar{T}_i$ navzgor omejeni s c , velja s.g. za vsak $t \geq 0$

$$t < \bar{S}_{\bar{N}_t+1} \leq t + c,$$

saj se na intervalu $(t, t + c]$ zagotovo nahaja kak prihod procesa $\bar{N}$.

Ko sedaj za to neenakost uporabimo Waldovo identiteto, dobimo

$$t + c \geq \mathbb{E}(\bar{S}_{\bar{N}_t+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\bar{N}_t+1} \bar{T}_i\right) = \mathbb{E}(\bar{T}_1)(\bar{M}(t) + 1)$$

saj je $\bar{N}_t + 1$ čas ustavljanja za n.e.p. zaporedje $(\bar{T}_i)_{i \geq 1}$ in je $\mathbb{E}(\bar{T}_1) = \mathbb{E}(T_1 \wedge c) \leq c < \infty$ in $\bar{M}(t) < \infty$. Z upoštevanjem $\bar{M}(t) \geq M(t)$ dobimo

$$t + c \geq \mathbb{E}(T_1 \wedge c)(M(t) + 1),$$

torej je,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t + c}{t \mathbb{E}(T_1 \wedge c)} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_1 \wedge c)}.$$

Ker je leva stran zgornje neenakosti neodvisna od c , mora le-ta veljati za vse $c > 0$, tako dobimo v limiti, ko pošljemo c proti neskončno

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}(T \wedge c)} = \frac{1}{\mu},$$

saj po LMK $\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T_1 \wedge c) = \mathbb{E}(T_1) = \mu$, tudi če je $\mu = \infty$.
Tako smo dobili

$$\frac{1}{\mu} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu},$$

kar je možno le, če je

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu},$$

s čimer je trditev dokazana.

Še nekaj asimptotskih lastnosti

Navedimo še nekaj asimptotskih lastnosti prenovitvenih procesov.

Krepki zakon velikih števil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}$ s.g. Res, iz

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}$$

in dejstva, da $N_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ s.g. in $\lim_{N_t \rightarrow \infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu$ s.g (kar je posledica KZVŠ za zaporedje $(T_i)_{i \geq 1}$) zgornje takoj sledi (premisli!).

Centralni limitni izrek: Če je $\sigma^2 = \text{Var}(T) < \infty$, potem

$$\frac{N_t - t/\mu}{\sigma \sqrt{t/\mu^3}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{N}(0, 1).$$

Za dokaz glej Resnick, str. 189.

D.N. Na spletni učilnici si pogledjte material v zvezi s prenovitvijo z nagradami.

Prenovitev z zaostankom

Pri prenovitvenih procesih smo predpostavili, da so medprihodni časi neodvisni in enako porazdeljeni. Vendar pa je veliko primerov, ko opazovani sistem potrebuje “začetno obdobje”, da se spravi v utečen ritem prenovitev. To modeliramo kot *prenovitev z zaostankom*, kjer predpostavimo, da je zaporedje medprihodnih časov $(T_i)_{i \geq 1}$ še vedno zaporedje neodvisnih nenegativnih slučajnih spremenljivk, pri čemer pa

- ▶ ima T_1 porazdelitveno funkcijo G ,
- ▶ $T_2, T_3, \dots$ pa porazdelitveno funkcijo F ,
 $\mu = E(T_2) = \int_{[0, \infty)} x dF(x), F(0) = \mathbb{P}(T_2 = 0) < 1.$

Dopuščamo torej, da ima prvi medprihodni čas drugačno porazdelitev, kot vsi nadaljni. Seveda, če je $G = F$, potem imamo opraviti z običajnim prenovitvenim procesom, sicer pa ne. Kot prej naj bo

$$S_k = \sum_{i=1}^k T_i, \quad N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}, \quad t \geq 0, \quad M(t) = \mathbb{E}(N_t).$$

Če je bil za prenovitveni proces edini vhodni podatek porazdelitev medprihodnih časov F , ima torej prenovitveni proces z zaostankom dva vhodna podatka, porazdelitev G časa T_1 in porazdelitev F časov $T_2, T_3, \dots$. Prenovitveni proces z zaostankom $(N_t)_{t \geq 0}$ ima podobne lastnosti kot prenovitveni proces in tudi dokazi so skoraj identični:

- ▶ Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima skoraj gotovo nepadajoče, z desne zvezne trajektorije, nima eksplozije in $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \infty$.
- ▶ $\mathbb{E}(N_t^r) < \infty, \forall t, r \geq 0$. V posebnem je $M(t)$ dobro definirana, z desne zvezna funkcija.
- ▶ $M(t) = \sum_{k \geq 0} G * F^{k*}(t)$, kjer je
 $G * F^{k*}(t) = \int_{[0,t]} G(t-s) dF^{k*}(s), k \geq 0, t \geq 0$.
- ▶ $\hat{M}(s) = \hat{G}(s)/(1 - \hat{F}(s))$.
- ▶ $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)/t = 1/\mu = 1/\mathbb{E}(T_2)$.
- ▶ $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t/t = 1/\mu$ s.g.. Zadnji dve lastnosti pomenita, da na dolgi rok vpliv drugačne porazdelitve za T_1 izzveni.

Najpomembnejši primer, kako naravno pridemo do prenovitve z zaostanki, je sledeč. Denimo, da je proces $(N_t)_{t \geq 0}$ prenovitveni proces z zaostankom (lahko tudi prenovitveni proces) in $0 < t$ dan čas. Potem je proces

$$\tilde{N}_s = N_{t+s} - N_t, \quad s \geq 0$$

tudi prenovitveni proces z zaostankom. Še več, za vektor $(\tilde{T}_i)_{i \geq 2}$ medprihodnih časov procesa $\tilde{N}$ velja $(\tilde{T}_i)_{i \geq 2} \stackrel{(d)}{=} (T_i)_{i \geq 2}$ in je torej vektor neodvisnih in enako porazdeljenih nenegativnih sl. sp. z isto porazdelitvijo kot T_2 , ki je neodvisen od $\tilde{T}_1$.

Za dokaz definirajmo $\tau = N_t + 1$, ki je čas ustavljanja za naravno filtracijo $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$ zaporedja $(T_i)_{i \geq 1}$. Potem je

$$\tilde{T}_1 = S_\tau - t \text{ } \mathcal{G}_\tau\text{-merljiva sl. sp. (presežek!),}$$

$$\tilde{T}_2 = S_{\tau+1} - S_\tau = T_{\tau+1}, \quad \tilde{T}_3 = T_{\tau+2}, \dots, \quad \tilde{T}_m = T_{\tau+m-1}, \quad m \geq 2.$$

Sedaj naj bo $A \in \mathcal{G}_\tau$ poljuben dogodek, $m \geq 2$ poljubno naravno število in $c_2, c_3, \dots, c_m$ dana števila. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(A, \tilde{T}_2 \leq c_2, \tilde{T}_3 \leq c_3, \dots, \tilde{T}_m \leq c_m) = \\
 &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tau = k, A, \tilde{T}_2 \leq c_2, \tilde{T}_3 \leq c_3, \dots, \tilde{T}_m \leq c_m) = \\
 &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau=k\} \cap A} \mathbb{1}_{\{\tilde{T}_2 \leq c_2\}} \cdots \mathbb{1}_{\{\tilde{T}_m \leq c_m\}}) = \\
 &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau=k\} \cap A} \mathbb{1}_{\{T_{k+1} \leq c_2\}} \cdots \mathbb{1}_{\{T_{k+m-1} \leq c_m\}}) = *,
 \end{aligned}$$

kjer smo nazadnje upoštevali, da je na dogodku $\{\tau = k\}$ po definiciji $\tilde{T}_j = T_{k+j-1}$. Če v k -tem sumandu uporabimo stolpno lastnost s pogojevanjem na $\mathcal{G}_k$ in upoštevamo, da je $\{\tau = k\} \cap A \in \mathcal{G}_k$ (ker je $A \in \mathcal{G}_\tau$) in da je zaporedje $(T_{k+i})_{i \geq 1}$ neodvisno od $\mathcal{G}_k$ in porazdeljeno enako kot $(T_i)_{i \geq 2}$, dobimo,

$$\begin{aligned}
* &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tau = k, A) \mathbb{P}(T_{k+1} \leq c_2, \dots, T_{k+m-1} \leq c_m) = \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tau = k, A) \mathbb{P}(T_2 \leq c_2, \dots, T_m \leq c_m) = \\
&= \mathbb{P}(T_2 \leq c_2, \dots, T_m \leq c_m) \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tau = k, A) = \\
&= \mathbb{P}(T_2 \leq c_2, \dots, T_m \leq c_m) \mathbb{P}(A),
\end{aligned}$$

iz česar lahko sklepamo², da je vektor $(\tilde{T}_i)_{i \geq 2}$ neodvisen od $\mathcal{G}_\tau$ (saj je bil m poljuben), posledično neodvisen od $\tilde{T}_1$ in enako porazdeljen kot $(T_i)_{i \geq 2}$, torej so komponente neodvisne in enako porazdeljene, saj so le-take pri $(T_i)_{i \geq 2}$.

Potrebno je dodati, da je bil celotni zgornji argument v bistvu samo ponovni dokaz krepke lastnosti Markova za zaporedje neodvisnih in (od nekod) enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Seveda pa ima lahko $\tilde{T}_1$ neko čisto drugo porazdelitev kot T_1 .

²V ozadju je seveda Dynkinova lema!

Porazdelitev integriranega repa

Izjemno pomemben je primer prenovitvenega procesa z zaostankom, pri katerem je $\mu = \mathbb{E}(T_2) = \int_{[0,\infty)} x dF(x) < \infty$ in ima T_1 porazdelitev integriranega repa glede na T_2 oz. F , kjer je za dano nenegativno porazdelitev F s prvim momentom μ porazdelitev integriranega repa dana s porazdelitveno funkcijo

$$G_*(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(u)) du, \quad x \geq 0, \quad \text{in } 0 \text{ sicer.}$$

(Prepričaj se, da je to res absolutno zvezna porazdelitvena funkcija! Kaj je ustrezna gostota?)

V takem primeru, ko ima T_1 porazdelitev integriranega repa glede na T_2 (oz T_i , $i \geq 2$), velja za prenovitveno mero

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t) = \frac{t}{\mu},$$

torej je le-ta linearna (in pripadajoča mera na $[0, \infty)$ $1/\mu$ -večkratnik Lebesguove) .

Res, z uporabo Laplace-Stieltjesove transformacije in Fubinijevega izreka vidimo za $s > 0$ (premisli!)

$$\begin{aligned}\hat{G}_*(s) &= \int_{[0,\infty)} e^{-sx} dG_*(x) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1 - F(x)}{\mu} dx \\&= \frac{1}{s\mu} \int_0^\infty (1 - F(x)) s e^{-sx} dx = \frac{1}{s\mu} \int_0^\infty \left(\int_{(x,\infty)} dF(u) \right) s e^{-sx} dx \\&= \frac{1}{s\mu} \int_{(0,\infty)} \left(\int_0^u s e^{-sx} dx \right) dF(u) = \frac{1}{s\mu} \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-su}) dF(u) \\&= \frac{1}{s\mu} \int_{[0,\infty)} (1 - e^{-su}) dF(u) = \frac{1}{s\mu} (1 - \mathbb{E}(e^{-sT_2})) = \frac{1}{s\mu} (1 - \hat{F}(s)),\end{aligned}$$

kjer smo na prehodu v zadnjo vrstico upoštevali, da je integrand v točki 0 enak 0 in je torej vseeno, ali integriramo po $(0, \infty)$ ali $[0, \infty)$.

Če sedaj izračunano vstavimo v formulo za Laplace-Stieltjesovo transformacijo za $M(t)$, dobimo za $s > 0$

$$\hat{M}(s) = \frac{\hat{G}_*(s)}{1 - \hat{F}(s)} = \frac{1}{s\mu} \frac{1 - \hat{F}(s)}{1 - \hat{F}(s)} = \frac{1}{s\mu},$$

to pa je točno Laplace-Stieltjesova transformacija funkcije t/μ oziroma mere dt/μ . Ker je Laplace-Stieltjesova transformacija nepadajočih z desne zveznih funkcij (oz. Laplaceva transformacija mer na $\mathcal{B}([0, \infty))$) injektivna,³ sledi, da je $M(t) = t/\mu$. kot smo trdili.

Ta rezultat daje slutiti, da ima ta posebni primer prenovitvenega procesa z zaostankom, ko je porazdelitev prvega medprihodnega časa porazdelitev integriranega repa glede na porazdelitev ostalih, zanimivo lastnost. Pričakovano število prihodov na interval $(t, t + h]$, $\mathbb{E}(N_{t+h} - N_t) = M(t+h) - M(t) = h/\mu$, je odvisno le od dolžine, ne pa od položaja intervala. Velja pa še več!

³Bolj natančno, če za meri ν_1 in ν_2 na $\mathcal{B}([0, \infty))$ Laplacevi transformaciji $\mathcal{L}(\nu_i) = \int_{[0, \infty)} e^{-sx} d\nu_i(x)$ obstajata za $s > s_i$, $i = 1, 2$, in se od nekod naprej ujemata, je $\nu_1 = \nu_2$.

Stacionarnost

Za proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$ rečemo, da je *stacionaren*, če za vsak $t \geq 0$ velja

$$(N_{t+s} - N_t)_{s \geq 0} \stackrel{(d)}{=} (N_s)_{s \geq 0},$$

t.j., da statistično ne moremo ugotoviti, ali spremljamo ta proces od začetka, ali pa šele od nekega časa t naprej. Primer stacionarnega procesa štetja je seveda HPP, pri katerem velja še neodvisnost procesa $(N_{t+s} - N_t)_{s \geq 0}$ od $\mathcal{F}_t$, česar pa v zgornji definiciji *ne* zahtevamo in v splošnem ne velja (podatek o starosti bo v splošnem vplival na porazdelitev presežka!).

Za prenovitveni proces z zaostankom $(N_t)_{t \geq 0}$ potem velja, da je stacionaren natanko tedaj, ko je $\mu = \mathbb{E}(T_2) < \infty$ in ima T_1 porazdelitev integriranega repa glede na T_2 oz. $T_i, i \geq 2$.

Dokaz karakterizacije stacionarnosti prenovitvenih procesov

Predpostavimo torej, da proces je stacionaren, torej

$(N_{t+s} - N_t)_{s \geq 0} \stackrel{(d)}{=} (N_s)_{s \geq 0}, t \geq 0$. Če na to relacijo uporabimo upanje, sledi (premisli!)

$$M(t+s) - M(t) = M(s) \text{ oziroma } M(t+s) = M(t) + M(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Vidimo torej, da je funkcija M aditivna oz. da reši Cauchyjevo enačbo. Znano je dejstvo iz analize, da so edine rešitve le-te enačbe, ki imajo še kakšno drugo dodatno lastnost (lokalno omejenost, merljivost, monotonost) oblike $M(t) = ct$ za nek $c \in \mathbb{R}$, torej $\mathbb{R}$ -linearne funkcije. Ker je $M(t)$ nepadajoča, na pr., sledi $M(t) = ct$ za nek c . Ker pa velja $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t)/t = 1/\mu$ vidimo, da je $c = 1/\mu$. Ker ne more biti konstantno enaka 0 (premisli!), sledi $1/\mu > 0$ iz česar $\mu = \mathbb{E}(T_2) < \infty$. S pomočjo Laplace-Stieltjesove transformacije sedaj dobimo (premisli!)

$$\hat{M}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1 - \hat{F}(s)} = \frac{1}{s\mu}, \quad s > 0,$$

takoj je

$$\hat{G}(s) = \frac{1 - \hat{F}(s)}{s\mu} = \hat{G}_*(s),$$

torej ima T_1 porazdelitev integriranega repa G_* (zaradi injektivnosti Laplace-Stieltjesove transformacije).

Za dokaz v drugo smer predpostavimo, da je $\mu < \infty$ in da ima T_1 porazdelitev integriranega repa glede na T_2 . Po izreku, ki smo ga dokazali v zvezi s prenovitvenimi procesi, ki jih opazujemo od nekod naprej in ob istih oznakah, je torej dovolj, če pokažemo, da je porazdelitev presežka $S_{N_t+1} - t = \tilde{T}_1(t)$ za vsak $t \geq 0$ enaka porazdelitvi integriranega repa (v posebnem torej neodvisna od t). Res, izračunamo

$$\mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x, N_t = k) =$$

$$= \mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x, N_t = 0) + \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x, N_t = k) = *,$$

torej smo ločili primera, da do časa t ni bilo prihodov ali pa je bil vsaj en prihod (primere takega razmišljanja bomo srečali še pogosto). Za prvi sumand opazimo, da če do časa t ni bilo prihodov, potem je prvi prihod po času t kar prvi prihod procesa, tako sledi (premisli!)

$$\mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x, N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > x + t) = 1 - G_*(x + t).$$

Za sumande v drugi vsoti pa opazimo

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x, N_t = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k \leq t, S_{k+1} = S_k + T_{k+1} > t + x) = *$$

Če sedaj v posamičnem sumandu te vsote pogojimo na S_k in upoštevamo, da je T_{k+1} neodvisen od S_k s porazdelitvijo F , ker je $k \geq 1$, dobimo (premisli!)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_k \leq t, S_{k+1} = S_k + T_{k+1} > t + x) = \\ &= \int_{[0, t]} \mathbb{P}(T_{k+1} > t + x - s) dF_{S_k}(s) = \int_{[0, t]} (1 - F(t + x - s)) dF_{S_k}(s), \end{aligned}$$

kjer je $F_{S_k} = G_* * F^{(k-1)*}$ porazdelitev časa k -tega prihoda S_k procesa $(N_t)_{t \geq 0}$.

Ko to vstavimo v **, dobimo

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x, N_t = k) &= \sum_{k \geq 1} \int_{[0,t]} (1 - F(t + x - s)) dF_{S_k}(s) = \\
 &= \int_{[0,t]} (1 - F(t + x - s)) \sum_{k \geq 1} d(G_* * F^{(k-1)*})(s) = \\
 &= \int_{[0,t]} (1 - F(t + x - s)) d\left(\sum_{k \geq 1} G_* * F^{(k-1)*}\right)(s) = \\
 &= \int_{[0,t]} (1 - F(t + x - s)) \frac{ds}{\mu} = ***,
 \end{aligned}$$

kjer smo na zadnjem koraku upoštevali, da je

$M(s) = \sum_{k \geq 1} G_* * F^{(k-1)*}(s) = s/\mu$. Ko sedaj uvedemo novo spremenljivko $u = t + x - s$ v ***, dobimo (premisli!)

$$*** = \int_{[x, t+x]} (1 - F(u)) \frac{du}{\mu} = G_*(t+x) - G_*(x)$$

po definiciji G_* . Ko sedaj vse to vstavimo v *, dobimo

$$\mathbb{P}(\tilde{T}_1(t) > x) = 1 - G_*(x+t) + G_*(t+x) - G_*(x) = 1 - G_*(x),$$

s čimer je izrek dokazan.

D.N.

1) Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ prenovitveni proces z zaostankom, kjer je

$T_1 \stackrel{(d)}{=} \text{gamma}(2, \lambda)$ in $T_i \stackrel{(d)}{=} \text{Exp}(\lambda)$, $i \geq 2$. Izračunaj $M(t)$.

2) Za zgornji proces in $t \geq 0$ izračunaj porazdelitev

$E_t = S_{N_t+1} - t$. Kam konvergirajo te slučajne spremenljivke v porazdelitvi ko $t \rightarrow \infty$? Kakšna si to razlagate?

3) Za zgornji proces in $t \geq 0$ naj bo $\tilde{N}_s^t = N_{t+s} - N_t$, $s \geq 0$. Izračunaj $M^t(s) = \mathbb{E}(\tilde{N}_s^t)$ in $\lim_{t \rightarrow \infty} M^t(s)$.

4) Premisli, da je $\mathbb{P}(S_{N_t+1} - t = 0) = 0$. S pomočjo tega navedi primer prenovitvenih procesov, ki nikakor niso stacionarni.

- 5) $M/G/1$ čakalna vrsta: Stranke prihajajo v skladu s $HPP(\lambda)$. Če je operater prost, jim postreže, pri čemer je čas strežbe porazdeljen s porazdelitveno funkcijo F , sicer pa odidejo. Denimo, da je v času 0 operater nezaseden. Identificiraj vsaj en prenovitveni proces in vsaj en prenovitveni proces z zaostankom v tem procesu strežbe. Kakšna je zveza med njima? V posebnem primeru, ko je porazdelitev F eksponentna s parametrom β izračunaj tudi njuni prenovitveni meri. Bodi pozoren na primera $\lambda = \beta$ in $\lambda \neq \beta$.
- 6) Če imajo v prenovitvenem procesu z zaostankom T_i , $i \geq 2$, preživetveno funkcijo $(1+x)^{-2}$, $x \geq 0$, kakšno porazdelitev mora imeti T_1 , da bo proces stacionaren. Kaj pa, če imajo preživetveno funkcijo $(1+x)^{-1}$?
- 7) Klici prihajajo v centralo v skladu s $HPP(\lambda)$. Telefonist, nezadovoljen s plačo, se odloča za belo stavko. V ta namen vrže kovanec in, če pade grb, ne stavka, sicer pa odgovarja samo na vsak drugi klic. Naj bo N_t število klicev, na katere odgovori do časa t po metu kovanca. Izračunaj $\mathbb{E}(N_t)$. Je to prenovitveni proces? Kaj pa se dogaja, če kovanec vrže šele po prvem klicu?

Blackwellov prenovitveni izrek

Naslednji rezultat, t.j. *Blackwellov prenovitveni izrek* navedemo brez dokaza (glej Resnick, str. 221).

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ prenovitveni proces z medprihodno porazdelitvijo F , ki ni aritmetična, $M(t) = \mathbb{E}(N_t)$,
 $\mu = \mathbb{E}(T) = \int_{[0, \infty)} x dF(x) \leq \infty$. Potem velja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (M(t+h) - M(t)) = \frac{h}{\mu}, \quad \forall h \geq 0.$$

Kot opombo povejmo, da verzija Blackwellovega izreka velja tudi v primeru, ko je medprihodna porazdelitev aritmetična, a v tem primeru le za take h , ki so večkratniki razpona F . Dokaz v tem primeru je bolj elementaren, kot v nearitmetičnem.

Blackwellov prenovitveni izrek je logično močnejši od elementarnega prenovitvenega izreka, ki ga lahko dobimo kot posledico Blacwellovega izreka, podobno kot iz konvergence zaporedja $(a_n)_{n \geq 1}$ sledi konvergenca Cesarovih vsot $c_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ k isti limiti, obratno pa ne (pomisli na zaporedje $a_n = (-1)^n$: Ali konvergira? Ali konvergira zaporedje Cesarovih vsot?). Res, za $t \geq 1$ lahko pišemo

$$\frac{M(t) - M(0)}{t} = \frac{M(t) - M(\lfloor t \rfloor)}{t} + \frac{\lfloor t \rfloor}{t} \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} \frac{M(k+1) - M(k)}{\lfloor t \rfloor}.$$

Števec prvega sumanda na levi je po Blackwellovem izreku omejen, saj je $M(t) - M(\lfloor t \rfloor) \leq M(\lfloor t \rfloor + 1) - M(\lfloor t \rfloor) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1/\mu$, torej prvi sumand konvergira proti 0. Vsota v drugem sumandu pa je Cesarova vsota za, po Blackwellovem izreku, konvergentno zaporedje $(M(k+1) - M(k))_{k \geq 0} \rightarrow 1/\mu$. Torej vsa leva stran konvergira k $1/\mu$, iz česar elementarni prenovitveni izrek sledi.

Prenovitvene enačbe

Za količine, ki so v povezavi s prenovitvenimi procesi, lahko, z upoštevanjem dejstva, da ob vsakem prenovitvenem trenutku ali prihodu S_k proces začne “na novo” (zaradi neodvisnosti in enake porazdeljenosti medprihodnih časov), velikokrat izpeljemo konvolucijske enačbe posebnega tipa, ki se imenujejo *prenovitvene enačbe*.

Formalno imamo:

- ▶ funkcijo $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki je merljiva in lokalno omejena (t.j., omejena na vsakem intervalu $[0, T]$, $T \geq 0$, in
- ▶ porazdelitveno funkcijo F nenegativne slučajne spremenljivke T , ki ni s.g. enaka 0, t.j., $F(0) < 1$.

Potem iščemo tako merljivo funkcijo g , kjer je $g(x) = 0$, $x < 0$ (kot pri vseh količinah, v povezavi s prenovitvenimi procesi), za katero je $g(t - \cdot) \in L^1(dF)$, $\forall t \geq 0$, in za katero velja

$$g(t) = h(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)dF(s), \quad t \geq 0,$$

kar zapišemo krajše kot

$$g = h + g * F.$$

Taki enačbi rečemo (h, F) -prenovitvena enačba.

Nekaj zgledov prenovitvenih enačb:

1) Prenovitvena mera $M(t)$ prenovitvenega procesa z medprihodno porazdelitvijo F zadošča (F, F) -prenovitveni enačbi

$M = F + M * F$. To lahko preverimo (vsaj) na dva načina. Bolj analitičen je sledeč. Res, za $t \geq 0$ vemo (z uporabo LMK)

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{k \geq 1} F^{k*}(t) = F(t) + \sum_{k \geq 2} F^{k*}(t) = F(t) + \sum_{k \geq 2} (F^{(k-1)*} * F)(t) = \\ &= F(t) + \sum_{k \geq 2} \int_{[0,t]} F^{(k-1)*}(t-s) dF(s) = \\ &= F(t) + \int_{[0,t]} \left(\sum_{k \geq 2} F^{(k-1)*}(t-s) \right) dF(s) = F(t) + \int_{[0,t]} M(t-s) dF(s). \end{aligned}$$

(F, F) -prenovitvena enačba

Bolj verjetnostni in bližji načinu, kako v splošnem pridemo do prenovitvenih enačb, pa je sledeč premislek:

$$\begin{aligned}M(t) &= \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_1 + \dots + T_k \leq t\}}\right) = \\&= \mathbb{P}(T_1 \leq T) + \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 2} \mathbb{1}_{\{T_1 + S_k - S_1 \leq t\}}\right) = \\&= \mathbb{P}(T_1 \leq T) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\sum_{k \geq 2} \mathbb{1}_{\{T_1 + S_k - S_1 \leq t\}} | T_1)) = *.\end{aligned}$$

Poglejmo si sedaj pogojno matematično upanje v drugem sumandu. Ker je zaporedje $(S_k - S_1)_{k \geq 2}$ neodvisno od T_1 in enako porazdeljeno kot $(S_k)_{k \geq 1}$, velja

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 2} \mathbb{1}_{\{T_1 + S_k - S_1 \leq t\}} | T_1 = s\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 2} \mathbb{1}_{\{s + S_k - S_1 \leq t\}}\right) =$$

$$= \mathbb{E}(\sum_{k \geq 2} \mathbb{1}_{\{S_k - S_1 \leq t-s\}}) = \mathbb{E}(\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t-s\}}) = M(t-s),$$

torej je $\mathbb{E}(\sum_{k \geq 2} \mathbb{1}_{\{T_1 + S_k - S_1 \leq t\}} | T_1) = M(t - T_1)$. Ko to vstavimo v * in upoštevamo $M(x) = 0, x < 0$, dobimo želeni rezultat.

Poglejmo si sedaj, kaj nam ta enačba pove o $M(0)$ (premisli!):

$$M(0) = F(0) + \int_{\{0\}} M(0) dF(s) = F(0) + M(0) \int_{\{0\}} dF(s) = F(0) + M(0)F(0),$$

kjer smo upoštevali, da je $F(x) = 0, x < 0$, torej je višina skoka porazdelitvene funkcije F v točki 0 enaka $F(0)$. Sledi

$M(0) = F(0)/(1 - F(0))$. Seveda, če je $F(0) = 0$ (t.j., če F nima skoka v točki 0 ali, kar je isto, če T ne pokaže vrednosti 0 s pozitivno verjetnostjo), potem je $M(0) = 0$. Vemo pa tudi, da je $N_0 \stackrel{(d)}{=} \text{geom}(1 - F(0)) - 1$, tako da isti rezultat lahko dobimo direktno.

(G, F) -prenovitvena enačba

2) Podoben premislek kot zgoraj (D.N.!) nam da, da za prenovitveni proces z zaostankom, kjer ima T_1 porazdelitveno funkcijo G , T_2 in vsi ostali pa F , prenovitvena mera $M(t)$ zadošča (G, F) -prenovitveni enačbi $M = G + M * F$ oziroma daljše

$$M(t) = G(t) + \int_{[0,t]} M(t-s)dF(s), \quad t \geq 0.$$

Analitični dokaz je povsem analogen prejšnjemu. Pri verjetnostnem pa je treba pogojevati na T_2 ! Kakšno enačbo pa dobimo s pogojevanjem na T_1 ? Kaj lahko poveš o $M(0)$? Kako je porazdeljen N_0 ?

Porazdelitvi starosti in presežka

Kot običajno naj bosta $A_t = t - S_{N_t}$ starost in $E_t = S_{N_t+1} - t$ presežek za prenovitveni proces $(N_t)_{t \geq 0}$ z medprihodno porazdelitvijo F ob času t . Definiramo

$$a_x(t) = \mathbb{P}(A_t \leq x) \text{ in } e_x(t) = \mathbb{P}(E_t \leq x).$$

Pri fiksnem t sta to torej točno porazdelitveni funkciji starosti in presežka, lahko pa ju gledamo tudi kot funkciji t pri fiksnem x in za ta primer imamo prenovitveni enačbi

$$a_x(t) = \mathbb{1}_{\{t \leq x\}}(t)(1 - F(t)) + \int_{[0,t]} a_x(t-s) dF(s),$$

$$e_x(t) = F(t+x) - F(t) + \int_{[0,t]} e_x(t-s) dF(s).$$

Funkcija $a_x(t)$ torej reši $(\mathbb{1}_{\{t \leq x\}}(1 - F), F)$ -prenovitveno enačbo in podobno $e_x(t)$ $(F(\cdot + x) - F(\cdot), F)$ -prenovitveno enačbo.

Poglejmo si izpeljavo za $a_x(t)$. Najprej naredimo hevristični premislek (kot ga običajno v praksi). Zanima nas $\mathbb{P}(A_t \leq x)$, torej verjetnost, da je starost v času t manjša ali enaka x . Pogojujemo na čas prvega prihoda $T_1 = S_1$ in ločimo dva primera. Če se prvi prihod zgodi po času t , tedaj je starost A_t enaka t in bo manjša ali enaka x le če je $t \leq x$. Če pa se prvi prihod zgodi v času $s \leq t$, potem pa se prenovitveni proces v tej točki “prenovi” oziroma začne na novo. Tako se pogovarjamo o starosti, ampak ne več na razdalji t od začetka, marveč na razdalji $t - s$ od začetka (premisli!).

Bolj formalno pa je izpeljava sledeča. Za $t, x \geq 0$ je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_t \leq x) &= \mathbb{P}(S_1 > t, A_t \leq x) + \mathbb{P}(S_1 \leq t, A_t \leq x) = \\ &= \mathbb{P}(S_1 > t, t \leq x) + \mathbb{P}(S_1 \leq t, A_t \leq x) = \\ &= \mathbb{1}_{\{t \leq x\}} \mathbb{P}(S_1 > t) + \mathbb{P}(S_1 \leq t, A_t \leq x) = \\ &= \mathbb{1}_{\{t \leq x\}} (1 - F(t)) + \mathbb{P}(S_1 \leq t, A_t \leq x) = *.\end{aligned}$$

Oglejmo si sedaj drugi sumand v *. Velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 \leq t, A_t \leq x) &= \mathbb{P}(N_t \geq 1, t - S_{N_t} \leq x) = \\&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(N_t = k, t - S_{N_k} \leq x) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(t - x \leq S_k \leq t < S_{k+1}) = \\&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(t - x \leq T_1 + (S_k - S_1) \leq t < T_1 + (S_{k+1} - S_1)) = **.\end{aligned}$$

Sedaj pogojimo na T_1 in upoštevamo $(S_k - S_1)_{k \geq 1} \stackrel{(d)}{=} (S_k)_{k \geq 0}$, da dobimo (premisli!)

$$\begin{aligned}** &= \sum_{k \geq 1} \int_{[0, t]} \mathbb{P}(t - x \leq s + S_k - S_1 \leq t < s + S_k - S_1) dF(s) = \\&= \sum_{k \geq 1} \int_{[0, t]} \mathbb{P}(t - x \leq s + S_{k-1} \leq t < s + S_k) dF(s) = \\&= \sum_{k \geq 1} \int_{[0, t]} \mathbb{P}(t - x - s \leq +S_{k-1} \leq t - s < S_k) dF(s) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \geq 1} \int_{[0,t]} \mathbb{P}(A_{t-s} \leq x, N_{t-s} = k-1) dF(s) = \\
&= \int_{[0,t]} \mathbb{P}(A_{t-s} \leq x) dF(s) = \int_{[0,t]} a_x(t-s) dF(s),
\end{aligned}$$

kjer smo integral in vsoto lahko zamenjali po LMK. Ko to vstavimo v *, dobimo želeni rezultat.

Izpeljavo prenovitvene enačbe za $e_x(t)$ vam prepuščam za domačo nalogo. Hevristični premislek je zelo podoben, zopet pogledamo, kaj se zgodi če je $T_1 > t$ in kaj če $T_1 \leq t$.

Sedaj se lahko vprašamo, kako je z obstojem in enoličnostjo rešitev prenovitvenih enačb. Odgovor nam da naslednji rezultat.

Obstoj in enoličnost rešitev prenovitvenih enačb

Naj bo funkcija $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ merljiva in lokalno omejena, $h(x) = 0$, $x < 0$, in F porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke T ki ni s.g. enaka 0, t.j., $F(0) < 1$. Potem obstaja ena sama merljiva in lokalno omejena funkcija g , $g(x) = 0$, $x < 0$, ki reši (h, F) -prenovitveno enačbo $g = h + g * F$ oziroma daljše

$$g(t) = h(t) + \int_{[0,t]} g(t-s)dF(s), \quad t \geq 0,$$

in sicer $g = h + h * M$ oziroma daljše

$$g(t) = h(t) + \int_{[0,t]} h(t-s)dM(s) = h(t) + \sum_{k \geq 1} \int_{[0,t]} h(t-s)dF^{k*}(s),$$

kjer je $M(t) = \sum_{k \geq 1} F^{k*}(t)$ prenovitvena mera prenovitvenega procesa $(N_t)_{t \geq 0}$ z medprihodno porazdelitvijo F .

Dokaz obstoja

Najprej dokažimo, da je $g_0(t) = (h + h * M)(t)$, $t \geq 0$, rešitev (h, F) -prenovitvene enačbe z zahtevanimi lastnostmi. Res, ker je h lokalno omejena, za vsak $T \geq 0$ velja $\sup_{[0, T]} |h(s)| = c_T < \infty$. Potem je za $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |g_0(t)| &= |h(t) + \int_{[0, t]} h(t-s) dM(s)| \leq \\ &\leq c_T + \int_{[0, t]} c_T dM(s) \leq c_T(1 + M(T)) < \infty, \end{aligned}$$

torej je g_0 lokalno omejena. Da je merljiva je očitno. Velja pa še

$$\begin{aligned} h + g_0 * F &= h + (h + h * M) * F = h + h * F + (h * M) * F = \\ &= h + h * F + h * (M * F) = h + h * (F + M * F) = h + h * M = g_0, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je M rešitev (F, F) -prenovitvene enačbe.

Dokaz enoličnosti

Tako smo videli, da je g_0 rešitev (h, F) -prenovitvene enačbe z zahtevanimi lastnostmi. Naj bo sedaj $g_1 = h + g_1 * F$ neka druga rešitev z istimi lastnostmi. Potem je

$$(g_1 - g_0) = (g_1 - g_0) * F = ((g_1 - g_0) * F) * F = (g_1 - g_0) * F^{2*} = \dots,$$

torej za vsak $k \geq 1$ velja $g_1 - g_0 = (g_1 - g_0) * F^{k*}$. Za $t \geq 0$ in vsak $k \geq 1$ tako velja

$$\begin{aligned} |g_1(t) - g_0(t)| &= \left| \int_{[0,t]} (g_1 - g_0)(t-s) dF^{k*}(s) \right| \leq \\ &\leq (\sup_{[0,t]} |g_1(s)| + \sup_{[0,t]} |g_0(s)|) \int_{[0,t]} dF^{k*}(s) \leq \\ &\leq K_t F^{k*}(t) = K_t \mathbb{P}(S_k \leq t) = K_t \mathbb{P}(N_t \geq k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

torej je $g_1 = g_0$.

Asimptotika rešitev prenovitvenih enačb

Videli smo, da ima (H, F) -prenovitvena enačba natanko eno lokalno omejeno merljivo rešitev $g = h + h * M$. Vendar je v praksi le-to zelo težko eksplicitno izračunati. Tipično se pri eksplicitnem reševanju uporabi Laplace-Stieltjesova transformacija, ki ima med drugim lastnost, da transformira konvolucijo v produkt, t. j., $\widehat{H_1 * H_2} = \hat{H}_1 \hat{H}_2$. Tako za $g = h + h * M$ dobimo

$$\hat{g} = \hat{h} + \hat{h}\hat{M} = \hat{h}(1 + \frac{\hat{F}}{1 - \hat{F}}) = \frac{\hat{h}}{1 - \hat{F}}.$$

Če torej znamo izračunati $\hat{h}$ in potem poiskati inverzno transformiranko funkcije $\hat{g}$, lahko v kakšnih izjemnih primerih izračunamo g eksplicitno, v splošnem pa je to praktično nemogoče. Se pa da vseeno kaj povedati o asimptotskem vedenju rešitve g , torej o

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t),$$

kar je, kot smo dejali že na začetku poglavja, stvar, ki nas pri prenovitvenih procesih najbolj zanima.

Pomemben zgled

Denimo, da ima funkcija h zelo preprosto obliko $h = \mathbb{1}_{[a,b)}(t)$ za neka $0 \leq a < b < \infty$. Za edino lokalno omejeno in merljivo rešitev (h, F) -prenovitvene enačbe g vemo, da je $g = h + h * M$ oziroma daljše

$$\begin{aligned} g(t) &= h(t) + \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{a \leq t-s < b\}} dM(s) = \\ &= h(t) + \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{t-b < s \leq t-a\}} dM(s) = h(t) + M(t-a) - M(t-b), \end{aligned}$$

torej po Blackwellovem izreku, v primeru ko F ni aritmetična porazdelitev, sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[a,b)}(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} (M(t-a) - M(t-b)) = 0 + \frac{b-a}{\mu},$$

kar lahko zapišemo kot $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(u) du$ (premisli!).

Direktni Riemannov integral

Da bi posplošili zadnjo opazko na bolj splošne funkcije h , si moramo pogledati koncept *direktnega Riemannovega integrala*. Za nenegativno merljivo funkcijo $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ rečemo, da je direktno Riemannovo integrabilna (krajše d.R.i.), če zadoča naslednjima pogojema.

► Za vsak $\Delta > 0$ je $\sum_{k \geq 0} (\sup_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t)) < \infty$ in



$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \Delta \sum_{k \geq 0} \left(\sup_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t) \right) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \Delta \sum_{k \geq 0} \left(\inf_{t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(t) \right).$$

Če h zadošča navedenima zahtevama, potem je limita v drugi zahtevi točno vrednost direktnega Riemannovega integrala $d.R.i. \int_0^\infty h(u) du$.

Funkcija h poljubnega predznaka je d.R.i., če sta le-taki $h_+ = h \wedge 0$ in $h_- = (-h) \wedge 0$, pri čemer je

$$d.R.i. \int_0^\infty h(u) du = d.R.i. \int_0^\infty h_+(u) du - d.R.i. \int_0^\infty h_-(u) du.$$

Kdor se spomni definicije Riemannovega integrala bo v drugi zahtevi prepoznal zahtevo, da spodnji in zgornji Darbouxovi vrsti (!) konvergirata k isti limiti, prva zahteva pa zagotavlja njuno konvergenco. Bistvena razlika je v tem, da pri Riemannovem integralu drobimo končen interval in imamo tako opraviti s končnimi (Riemannovimi, Darbouxovimi) vsotami, tu pa drobimo cel poltrak $[0, \infty)$ naenkrat.

Pomembno je še poudariti, da je razred d.R.i. funkcij ožji od razreda bodisi Lebesguovo ali posplošeno Riemannovo integrabilnih funkcij. Res, če vzamemo

$$h(t) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{[k, k+2^{-k})}(t),$$

zlahka vidimo, da je h posplošeno Riemannovo integrabilna in tudi Lebesguovo integrabilna, pa *ni* direktno Riemannovo integrabilna (premisli!).

Naslednji rezultat nam da nekaj kriterijev, ki nam omogočajo preveriti, ali je dana funkcija direktno Riemannovo integrabilna.

Kriteriji za direktno Riemannovo integrabilnost

- ▶ Če je nenegativna funkcija $h \geq 0$ d.R.i., potem je h omejena, zvezna skoraj povsod na $[0, \infty)$ in $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$.
- ▶ Če je h merljiva in omejena funkcija na $[0, \infty)$ za katero obstaja $T \geq 0$ tak, da je $h(t) = 0$, $t \geq T$ in je h zvezna skoraj povsod na $[0, \infty)$, potem je h d.R.i.
- ▶ Če je $h \geq 0$ nenaraščajoča posplošeno Riemannovovo integrabilna funkcija, potem je d.R.i. in je njen direktni Riemannov integral enak posplošenemu $\int_0^\infty h(u) du$.
- ▶ Če velja $0 \leq h \leq H$, kjer je H d.R.i., h pa merljiva in zvezna skoraj povsod, potem je h d.R.i.

Dokazi so precej tehnični in jih bom napisal posebej. V praksi sta najbolj uporabna zadnja dva kriterija. Merljivost in zveznost skoraj povsod sta zahtevi tudi za (posplošeno) Riemannovo integrabilnost. Sedaj lahko formuliramo glavni rezultat v zvezi z asimptotskim vedenjem rešitev prenovitvenih enačb.

Smithov ključni prenovitveni izrek

Če je funkcija $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ d.R.i. in F porazdelitvena funkcija nearitmetične nenegativne slučajne spremenljivke T , potem za edino merljivo lokalno omejeno funkcijo g , ki reši (h, F) -prenovitveno enačbo $g = h + g * F$ velja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(u) du,$$

kjer je $\mu = \int_{[0, \infty)} x dF(x) = \mathbb{E}(T) \in (0, \infty]$.

Za dokaz se spomnimo, da je $g = h + h * M$ in ker velja $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ (ker je h d.R.i.), je dovolj dokazati

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (h * M)(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, t]} h(t-s) dM(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(u) du.$$

Sedaj najprej predpostavimo, da je h posebne oblike

$$h = \sum_{k \geq 1} c_k \mathbb{1}_{[(k-1)\Delta, k\Delta)}(t),$$

pri čemer velja $c_k \geq 0$, $\sum_{k \geq 1} c_k < \infty$ in je $F(\Delta) < 1$ (zadnji zahtevi je za dovolj majhne Δ zadoščeno, saj je $F(0) < 1$ po predpostavkah in je F zvezna z desne). V takem primeru je, z uporabo istega premisleka kot v pomembnem zgledu z začetka poglavja,

$$\int_{[0,t]} h(t-s) dM(s) = \sum_{k \geq 1} c_k (M(t - (k-1)\Delta) - M(t - k\Delta)).*$$

(Vsota je tu končna, ker je $M(x) = 0$ za $x < 0$!). Po Blackwellovem izreku vemo, da je limita k -tega sumanda enaka $c_k \Delta / \mu$. Če smemo nesti limito pod vsoto, potemtakem dobimo želeni rezultat (premisli!) za funkcije h take posebne oblike. V ta namen potrebujemo naslednjo pomožno lemo.

$$\sup_{u \geq 0} (M(u) - M(u - \Delta)) \leq (1 - F(\Delta))^{-1}.$$

Res, ker je M rešitev (F, F) -prenovitvene enačbe, je za $t \geq 0$

$$M(t) = F(t) + \int_{[0,t]} M(t-s) dF(s) = F(t) + \int_{[0,t]} F(t-s) dM(s)$$

(tu smo upoštevali, da je konvolucija komutativna, t.j.

$H_1 * H_2 = H_2 * H_1$). Potem sledi (premisli!)

$$\begin{aligned} 1 &\geq F(t) = M(t) - \int_{[0,t]} F(t-s) dM(s) = \int_{[0,t]} (1 - F(t-s)) dM(s) \geq \\ &\geq \int_{[0,t]} (1 - F(t-s)) \mathbb{1}_{(t-\Delta, t]}(s) dM(s) \geq (1 - F(\Delta)) \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{(t-\Delta, t]} dM(s) \\ &= (1 - F(\Delta))(M(t) - M(t - \Delta)), \end{aligned}$$

iz česar takoj sledi (ker je $F(\Delta) < 1$ po predpostavki)

$$M(t) - M(t - \Delta) \leq (1 - F(\Delta))^{-1}.$$

Če se vrnemo nazaj k (*), tako vidimo, da je po LDK

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} c_k (M(t - (k-1)\Delta) - M(t - k\Delta)) =$$

$$\sum_{k \geq 1} c_k \lim_{t \rightarrow \infty} (M(t - (k-1)\Delta) - M(t - k\Delta)) = \sum_{k \geq 1} c_k \frac{\Delta}{\mu} = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(u) du,$$

torej Smithov ključni prenovitveni izrek velja za take posebne funkcije h .

Sedaj predpostavimo, da je $h \geq 0$ nenegativna in d.R.i. Definiramo

$$\underline{h}_\Delta(t) = \sum_{k \geq 0} \left(\inf_{u \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(u) \right) \mathbb{1}_{[k\Delta, (k+1)\Delta)}(t),$$

$$\bar{h}_\Delta(t) = \sum_{k \geq 0} \left(\sup_{u \in [k\Delta, (k+1)\Delta)} h(u) \right) \mathbb{1}_{[k\Delta, (k+1)\Delta)}(t).$$

Po konstrukciji velja $\underline{h}_\Delta(t) \leq h(t) \leq \bar{h}_\Delta(t)$, $t \geq 0$.

Ker sta $\underline{h}_\Delta$ in $\bar{h}_\Delta$ funkciji posebne oblike, kot smo jih obravnavali v prvem primeru, je za Δ dovolj majhen, da je $F(\Delta) < 1$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} \underline{h}_\Delta(t-s) dM(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \underline{h}_\Delta(u) du,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} \bar{h}_\Delta(t-s) dM(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \bar{h}_\Delta(u) du.$$

Ker je

$$\int_{[0,t]} \underline{h}_\Delta(t-s) dM(s) \leq \int_{[0,t]} h(t-s) dM(s) \leq \int_{[0,t]} \bar{h}_\Delta(t-s) dM(s),$$

sledi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \underline{h}_\Delta(u) du &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} h(t-s) dM(s) \leq \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} h(t-s) dM(s) \leq \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \bar{h}_\Delta(u) du. \end{aligned}$$

Če sedaj pošljemo Δ proti 0 in upoštevamo, da je

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \int_0^\infty \underline{h}_\Delta(u) du = \lim_{\Delta \downarrow 0} \int_0^\infty \bar{h}_\Delta(u) du = \int_0^\infty h(u) du,$$

saj je h d.R.i., dobimo (sendvič!)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} h(t-s) dM(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(u) du,$$

kar dokaže Smithov ključni izrek za nenegativne d.R.i. funkcije h .

Za poljubno d.R.i. funkcijo h , $h = h_+ - h_-$, sedaj velja

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} (h_+ - h_-)(t-s) dM(s) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} (h_+)(t-s) dM(s) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} (h_-)(t-s) dM(s) = \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h_+(u) du - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h_-(u) du = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(u) du, \end{aligned}$$

s čimer je izrek dokazan.

Cikli delovanja in nedelovanja

Za uporabo Smithovega ključnega izreka si najprej pogledjmo naslednji primer. Neka naprava ima življensko dobo, ki je porazdeljena kot nenegativna slučajna spremenljivka U . Ko se pokvari, je čas popravila porazdeljen kot nenegativna slučajna spremenljivka V , pri čemer sta U in V lahko odvisni. Po popravilu naprava zopet deluje kot nova.

Formalno imamo torej zaporedje $(U_i, V_i)_{i \geq 1}$ neodvisnih vektorjev in $(T_i = U_i + V_i)_{i \geq 1}$ neodvisnih slučajnih spremenljivk. Prenovitev se, po predpostavki, da po popravilu naprava deluje kot nova, zgodi v časih $0 = S_0, T_1 = S_1, T_1 + T_2 = S_2, \dots$. Zanima nas limita verjetnosti dogodkov B_t , da naprava deluje v času t . Naj bo F_1 porazdelitvena funkcija za U in F_2 za V . Predpostavimo še, da sta upanji $a = \mathbb{E}(U)$ in $b = \mathbb{E}(V)$ končni.

Naj bo

$$g(t) = \mathbb{P}(B_t) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(S_k \leq t < S_k + U_{k+1}).$$

Za funkcijo $g(t)$ bomo sedaj izpeljali prenovitveno enačbo. Kot običajno, bomo ločili dva primera: ali se je do časa t že zgodila kakšna prenovitev, ali pa ne. Dobimo

$$g(t) = \mathbb{P}(B_t, T_1 > t) + \mathbb{P}(B_t, T_1 \leq t) = \mathbb{P}(U_1 > t) + \mathbb{P}(B_t, T_1 \leq t),$$

kjer smo upoštevali, da lahko naprava deluje, preden se je dovršilo prvo popravilo, le če sploh še ni prišlo do prve okvare. Za drugi sumand pa upoštevamo, da če se poravilo dovrši v času s , $0 \leq s \leq t$, naprava zopet deluje kot nova, torej se sprašujemo o verjetnosti iste stvari, le ne na razdalji t od izhodišča, ampak na razdalji $t - s$ od trenutka prvega dovršenega popravila. S pogojevanjem na T_1 tako dobimo prenovitveno enačbo

$$g(t) = 1 - F_1(t) + \int_{[0,t]} g(t-s) dF(s),$$

kjer je F porazdelitvena funkcija za $T = U + V$. Sedaj moramo preveriti, da je $h(t) = 1 - F_1(t)$ d.R.i. To drži, saj je $1 - F_1(t)$ nenaraščajoča, nenegativna in $\int_0^\infty (1 - F(u)) du = a < \infty$.

Potem nam Smithov ključni prenovitveni izrek da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{\int_0^\infty (1 - F_1(u)) du}{\mathbb{E}(T)} = \frac{a}{a + b},$$

torej na dolgi rok verjetnost, da naprava v danem trenutku deluje, konvergira proti pričakovani dolžini delovanja znotraj enega cikla deljeno z pričakovano dolžino cikla delovanja in nedelovanja.

Ta rezultat je zanimivo primerjati z rezultatom, ki ga dobimo, če si predstavljamo naš proces kot prenovitev z nagradami, pri čemer je nagrada znotraj enega cikla točno čas, ko naprava deluje. Potem je pobrana nagrada do časa t (premisli!) $\int_0^t \mathbb{1}_{B_s} ds$, torej iz prenovitve z nagradami sledi, da velja z verjetnostjo 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \mathbb{1}_{B_s} ds}{t} = \frac{a}{a + b}.$$

Kljub na videz istemu končnemu rezultatu pa, upam, vidite, da gre za dve precej različni stvari.

Asimptotična porazdelitev starosti in presežka

Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ prenovitveni proces in naj bosta, kot običajno, $A_t = t - S_{N_t}$ in $E_t = S_{N_t+1} - t$ starost in presežek. Za funkciji $a_x(t) = \mathbb{P}(A_t \leq x)$ in $e_x(t) = \mathbb{P}(E_t \leq x)$ smo izpeljali prenovitveni enačbi. Poglejmo si, kaj nam torej Smithov ključni prenovitveni izrek pove o njuni *asimptotični porazdelitvi* v primeru, ko F ni aritmetična

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_t \leq x) = \lim_{t \rightarrow \infty} a_x(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_t \leq x) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_x(t).$$

Za $a_x(t)$ smo dobili enačbo

$$a_x(t) = (1 - F(t))\mathbb{1}_{[0,x]}(t) + \int_{[0,t]} a_x(t-s)dF(s).$$

Preveriti moramo, da je $h(t) = (1 - F(t))\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ d.R.i.

To drži, saj je $h(t)$ nenegativna, zvezna skoraj povsod in enaka 0 od nekod naprej. Tako nam Smithov ključni prenovitveni izrek da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_t \leq x) = \frac{\int_0^\infty (1 - F(u)) \mathbb{1}_{[0,x]}(u) du}{\mu} = \frac{\int_0^x (1 - F(u)) du}{\mu}.$$

Če je $\mu = \infty$ nam to pove, da bo v nekem smislu starost asimptotično šla čez vse meje.⁴ Bolj zanimiv pa je primer, ko je $\mu < \infty$, saj v tem primeru dobimo, da je asimptotična porazdelitev starosti porazdelitev integriranega repa za medprihodno porazdelitev!

Poglejmo si še presežek. V tem primeru je $e_x(t)$ rešitev (h, F) -prenovitvene enačbe, kjer je

$$h(t) = F(t+x) - F(t) = (1 - F(t)) - (1 - F(t+x)).$$

Denimo, da je $\mu = \mathbb{E}(T) = \int_0^\infty (1 - F(u)) du < \infty$. Potem je funkcija $(1 - F(t))$ nenegativna, nenaraččajoča in (posplošeno) Riemannovo integrabilna, torej je d.R.i.

⁴Točen rezultat v tem primeru nam da Dynkin-Lampertijev izrek 

Enako velja za $(1 - F(t + x))$, saj je tu

$\int_0^\infty (1 - F(t + x))dx = \int_x^\infty (1 - F(u))du \leq \mu$. Ker je razlika dveh funkcij, ki sta d.R.i. tudi d.R.i., nam Smithov ključni prenovitveni izrek da, da je v tem primeru asimptotična porazdelitev presežka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_t \leq x) = \frac{\int_0^\infty (1 - F(u))du - \int_x^\infty (1 - F(u))du}{\mu} = \frac{\int_0^x (1 - F(u))du}{\mu}$$

zopet porazdelitev integriranega repa!

Pomen tega rezultata se vidi v kombinaciji z rezultatom o stacionarnosti prenovitvenih procesov (z zaostankom). Ker so le-ti stacionarni natanko tedaj, ko ima prvi medprihodni čas porazdelitev integriranega repa glede na preostale, in ker je presežek E_t točno čas prvega prihoda, če proces opazujemo od časa t naprej, vidimo naslednje.

Na dolgi rok prenovitveni proces preide v stacionarni režim, t.j. ko gre t v neskončno postaja proces $(N_{t+s} - N_t)_{s \geq 0}$ stacionaren.

Rezultat za starost A_t , ki pa je čas med zadnjim prihodom do časa t in časom t pa nam pove, da je asimptotično tudi štetje prihodov od časa t nazaj stacionarno.

D.N

- ▶ Naj bo $(N_t)_{t \geq 0}$ prenovitveni proces z $EZ[0, 1]$ -porazdeljeno medprihodno porazdelitvijo. Kakšna je asimptotična porazdelitev presežka? Kolikšna je v limiti njegova pričakovana dolžina?
- ▶ Denimo, da imamo napravo, ki ima življensko dobo U . Ko se pokvari, pokličemo servis in čakamo na serviserja čas V . Popravilo samo traja W . Vse spremenljivke imajo končno upanje. Po popravilu naprava deluje kot nova. Kolikšna je na dolgi rok verjetnost: a) da naprava deluje, b) da čakamo na serviserja, c) da je naprava v popravilu?
- ▶ Izpelji prenovitveno enačbo za *skupno* porazdelitveno funkcijo starosti in presežka, t.j.

$$f_{x,y}(t) = \mathbb{P}(A_t \leq x, E_t \leq y).$$

Kdaj bosta le-ta asimptotično neodvisna (če je F nearitmetična)? Kaj ti to pove o odvisnosti oz. neodvisnosti starosti in presežka?

Prenovitev z defektom

Zadnji primer procesov štetja, ki si jih bomo pogledali, so *prenovitveni procesi z defektom*. Le-ti ustrezajo situaciji, ko so nenegativne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke $(T_i)_{i \geq 1}$ s porazdelitveno funkcijo F defektne oz. izrojene, kar pomeni, da je $\mathbb{P}(T = \infty) = 1 - F(\infty) > 0$. Tu je $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \mathbb{P}(T < \infty)$. Da se izognemo trivialnostim, predpostavimo še, da je $F(\infty) > 0$ (sicer je $T_1 = \infty$ s.g. in je, posledično, $N_t = 0$ za vse $t \geq 0$).

Poglejmo si porazdelitev $N_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} N_t$ (ki je dobro definirana, ker je proces nepadajoč!):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_\infty = k) &= \mathbb{P}(S_k < \infty, S_{k+1} = \infty) = \\ &= \mathbb{P}(T_1 < \infty, \dots, T_k < \infty, T_{k+1} = \infty) = F(\infty)^k (1 - F(\infty)).\end{aligned}$$

Vidimo, da je $N_\infty \stackrel{(d)}{=} \text{geom}(1 - F(\infty)) - 1$, torej je neizrojena.

Enako kot pri navadnih prenovitvenih procesih definiramo prenovitveno mero $M(t) = \mathbb{E}(N_t)$. Potem je z uporabo LMK

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}\right) = \sum_{k \geq 1} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_k \leq t) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_k < \infty) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(T_1 < \infty, \dots, T_k < \infty) = \sum_{k \geq 1} F(\infty)^k = \frac{F(\infty)}{1 - F(\infty)}.\end{aligned}$$

V praksi bolj pogosto, kot direktni študij prenovitvenih procesov z defektom, ti nastopajo posredno, če imamo opraviti s količino, ki zadošča *prenovitveni enačbi z defektom* $g = h + g * F$ oz.

$$g(t) = h(t) + \int_{[0,t]} g(t-s) dF(s),$$

kjer je F porazdelitvena funkcija izrojene nenegativne slučajne spremenljivke, t.j., $F(\infty) < 1$.

Obstoj in enoličnost rešitev

V praksi najpogosteje nastopi primer, ko imamo enačbo oblike $g = h + \gamma g * F$, kjer je F sicer porazdelitvena funkcija neizrojene nenegativne slučajne spremenljivke ($F(\infty) = 1$), ampak je $0 < \gamma < 1$.

Za prenovitvene enačbe z defektom velja naslednje:

Naj bo $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ merljiva in lokalno omejena, $h(x) = 0$, $x < 0$. Potem obstaja natanko ena merljiva in lokalno omejena funkcija g , $g(x) = 0$, $x < 0$, ki reši prenovitveno enačbo z defektom $g = h + g * F$. Dana je z $g = h + h * M$ oziroma daljše

$$g(t) = h(t) + \int_{[0,t]} h(t-s) dM(s), \quad t \geq 0.$$

Dokaz je identičen dokazu v primeru prenovitvenih enačb.

Asimptotika rešitev prenovitvenih enačb z defektom

Denimo, da je funkcija h lokalno omejena in merljiva, $h(x) = 0$, $x < 0$ in da obstaja

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Če je $h(\infty) \in \mathbb{R}$ (iz česar sledi, da je h omejena!), potem za edino lokalno omejeno merljivo rešitev (h, F) -prenovitvene enačbe z defektom g velja⁵

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{h(\infty)}{1 - F(\infty)}.$$

Res, vemo, da je $g = h + h * M$, torej

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, t]} h(t-s) dM(s) = \\ &= h(\infty) + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} h(t-s) \mathbb{1}_{[0, t]}(s) dM(s) = \end{aligned}$$

⁵V resnici trditev velja tudi v primeru, ko je $h(\infty) = \pm\infty$ 

$$\begin{aligned}
&= h(\infty) + \int_{[0,\infty)} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} h(t-s) \mathbb{1}_{[0,t]}(s) \right) dM(s) = \\
&= h(\infty) + h(\infty) \int_{[0,\infty)} dM(s) = h(\infty)(1 + M(\infty)) = \frac{h(\infty)}{1 - F(\infty)},
\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je h omejena in da je z dM dana *končna* mera na $[0, \infty)$ (premisli!), torej je zadoščeno pogojem LDK.

Včasih se da ta rezultat še izboljšati s pomočjo eksponentne transformacije mere dF . Denimo, da obstaja $\alpha > 0$ (premisli, zakaj nujno $\alpha > 0$!) tak, da velja

$$\int_{[0,\infty)} e^{\alpha x} dF(x) = 1.$$

Tak α ne obstaja nujno, je pa, če obstaja, en sam. V tem primeru je s predpisom $\nu(A) = \int_A e^{\alpha x} dF(x)$, $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ dana *verjetnostna* mera na $[0, \infty)$.

V takem primeru lahko pri predpostavkah prejšnje trditve zapišemo (premisli!)

$$\begin{aligned} g(t) - g(\infty) &= h(t) + \int_{[0,t]} g(t-s) dF(s) - g(\infty) = \\ &= h(t) - g(\infty)(1 - F(t)) + \int_{[0,t]} (g(t-s) - g(\infty)) dF(s) = \\ &= h(t) - h(\infty) \frac{1 - F(t)}{1 - F(\infty)} + \int_{[0,t]} (g(t-s) - g(\infty)) dF(s). \end{aligned}$$

Če sedaj to enakost pomnožimo z $e^{\alpha t}$, dobimo

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}(g(t) - g(\infty)) &= \\ &= e^{\alpha t}(h(t) - h(\infty) \frac{1 - F(t)}{1 - F(\infty)}) + \int_{[0,t]} e^{\alpha t}(g(t-s) - g(\infty)) dF(s) = \\ &= e^{\alpha t}(h(t) - h(\infty) \frac{1 - F(t)}{1 - F(\infty)}) + \int_{[0,t]} e^{\alpha(t-s)}(g(t-s) - g(\infty)) e^{\alpha s} dF(s). \end{aligned}$$

Potem definiramo

$$\tilde{g}(t) = e^{\alpha t}(g(t) - g(\infty)),$$

$$\tilde{h}(t) = e^{\alpha t}(h(t) - h(\infty)\frac{1 - F(t)}{1 - F(\infty)}),$$

$$dF_{\alpha}(x) = e^{\alpha x}dF(x)$$

in opazimo, da zadnja enakost pomeni, da funkcija $\tilde{g}$ reši $(\tilde{h}, F_{\alpha})$ -prenovitveno enačbo $\tilde{g} = \tilde{h} + \tilde{g} * F_{\alpha}$ (ker je dF_{α} verjetnostna mera!). Torej, če so izpolnjeni pogoji Smithovega ključnega prenovitvenega izreka, da je $\tilde{h}$ d.R.i. in da F_{α} ni aritmetična, potem sledi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{g}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (g(t) - g(\infty))e^{\alpha t} = \frac{\int_0^{\infty} \tilde{h}(u) du}{\int_{[0, \infty)} x e^{\alpha x} dF(x)},$$

kar nam da ne samo, da $g(t)$ konvergira proti $g(\infty)$ ampak tudi natančno oceno za hitrost konvergence (eksponentno s parametrom α).

Včasih lahko podoben trik uporabimo tudi v primeru, ko imamo konvolucijsko enačbo oblike $g = h + g * F$, kjer je F nepadajoča, zvezna z desne, $F(x) = 0$, $x < 0$ in $F(\infty) > 1$, kar pomeni, da ustrežna mera, ki jo F porodi, ni verjetnostna, saj da poltraku $[0, \infty)$ mero $F(\infty)$. Seveda sedaj iščemo $\alpha < 0$ tak, da je $\int_{[0, \infty)} e^{\alpha x} dF(x) = 1$.

- ▶ Naj bo E_t presežek v času t za prenovitveni proces (N_t) z medprihodno porazdelitvijo F . Izpelji prenovitveno enačbo za $g(t) = \mathbb{E}(E_t)$. Kdaj lahko kaj poveš o asimptotskem vedenju $g(t)$?
- ▶ Naj bo $K_c = \inf\{t | t - S_{N_t} \geq c\}$. Izpelji prenovitveno enačbo za porazdelitveno funkcijo K .
- ▶ *Procesi razvejanja*. Bakterije imajo življensko dobo porazdeljeno s porazdelitveno funkcijo F s končno pričakovano življensko dobo m . Ob smrti z delitvijo porodijo K potomcev, $\mathbb{E}(K) = k < \infty$, ki potem neodvisno nadaljujejo svoja življenja. Denimo, da imamo v času 0 eno bakterijo in naj bo N_t število bakterij v času t . Izpelji prenovitveno enačbo za $M(t) = \mathbb{E}(N_t)$. Kdaj lahko kaj poveš o asimptotiki $M(t)$?