

Seznam možnih tem učnih ur pri predmetu *Sodobni trendi v izobraževanju matematike*

V študijskem letu 2021/22, februarja 2022

1. *Reševanje logičnih ugank o vitezi in oprodah z enačbami*

Logične uganke pogosto rešujemo, ne da bi uporabili neko matematično orodje. Logične uganke o vitezi, ki vedno govorijo resnico, in oprodah, ki se vedno lažejo, običajno rešujemo z naštevanjem in analizo različnih, včasih tudi preštevilnih možnosti. S povezovanjem Boolove logike in komutativnih Boolovih kolobarjev lahko prevedemo logične uganke o vitezi in oprodah, ter njihove bolj zapletene različice, v sisteme enostavnih algebrskih enačb. Vsaka rešitev sistema enačb ustreza rešitvi logične uganke.

Literatura: [3]

2. *Uganke o moči množic*

Spomnimo se, da je moč množice A , ki jo označimo z $|A|$, enaka številu njenih elementov. Številne, tudi zelo zahtevne naloge s področja kombinatorike se ukvarjajo z ugotavljanjem moči množic. Ugotavljanje moči malih množic je preprosto. Ali pa ne: na primer, kakšna je moč množice $A = \{2, |A|\}$? Očitni odgovor $|A| = 2$ namreč ni pravilen, saj če bi res bil, potem je $A = \{2\}$ in je torej $|A| = 1$. Na prvi pogled je paradoks podoben Russellovemu paradoksu o množici vseh množic, ki sebe ne vsebujejo. A na drugi, bolj poglobljeni pogled, je ta preprost paradoks predstavnik vrste zanimivih ugank o moči množic. Zanima nas rešljivost takih ugank ter njihova povezanost z bolj znanimi ugankami o vitezi in oprodah.

Literatura: [8]

3. *Poenoteno in poenostavljeno računanje limit*

Limite so ena prvih resnih preprek na poti k učenju matematične analize. Njihovo računanje namreč ni neposredno navezano na definicijo. Za uspešno računanje limite moramo običajno prepoznati enega ali več vzorcev v podanem aritmetičnem izrazu. Na osnovi prepoznanih vzorcev moramo nato opraviti vrsto transformacij prvotnega izraza v druge oblike, ki nam omogočajo izračun limite. Pogosto je proces računanja zahteven in dolg niz (neuspešnih ali le delno uspešnih) poizkusov. Tukaj pokažemo, da obstaja poenotena procedura računanja poljubne limite, ki sledi njeni defini-

ciji, s katero lahko izračunamo tako raznovrstne limite, kot so, na primer,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2+2x-15}}{x-3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x-\sin x}$ ali pa $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Literatura: [4]

4. Preštevanje božičnih dreves

Drevo je povezan graf brez zank. Graf je povezan, če za vsaki dve vozlišči v grafu obstaja pot, tj. zaporedje povezav, ki ju povezuje. Zanka v grafu je zaporedje povezav brez ponovitev, ki povezuje vozlišče s samim seboj. Mnogi zanimivi razredi grafov so posebne vrste dreves.

Božična drevesa so ena takih vrst dreves z višino $h \geq 2$ in *vejami* dolžin $l_1, l_2, \dots, l_h : 1 \leq l_i \leq l_{i+1} < h$, ki zadostujejo dvema pogojema. Najprej, obstaja pot dolžine $h+1$ vozlišč in h povezav, ki tvori *deblo* božičnega drevesa: vozlišče 1 na enem koncu debla ima tri sosedje, vozlišče $h+1$ na drugem koncu pa enega. Nato iz vsakega vozlišča debla $i : 1 \leq i \leq h$ izhajata dve poti, *veji* dolžine l_i povezav, ki se končata z listom, tj. vozliščem z enim sosedom, in ne vključujeta povezav iz debla. Želimo ugotoviti število različnih božičnih dreves višine h in število različnih božičnih dreves s podanim številom vozlišč n .

Literatura: [7]

5. Dva prijatelja in kolo

Ana in Branko se odpravita na pot od Anine hiše do Brankovega stanovanja. Pri tem imata na voljo zgolj eno kolo, ki ga hočeta izkoristiti tako, da bi čim prej oba prispela do cilja. Zato se odpravita na pot istočasno in po isti poti. Gibljeta se enakomerno: hitrost hoje v_H je manjša od hitrosti kolesarjenja v_K . Ana se odpravi s kolesom, prekolesari razdaljo h , pusti kolo ob cesti in nadaljuje peš. Ko Branko pride do kolesa, prehití Ano in na razdalji h od točke prehitevanja pusti kolo ter nadaljuje peš. Tako si izmenjujeta kolo, dokler ne prideta do cilja. Če je Ana rabila t_1 časa, da pride do cilja, Branko pa t_2 , rečemo, da sta za pot potrebovala $t = \max(t_1, t_2)$ časa. Želimo analizirati odvisnost časa potovanja t od razdalje h : ta lahko pomaga Ani in Branku določiti strategijo izmenjevanja kolesa, ki vodi k minimalnemu potovalnemu času t .

Literatura: [14]

6. Kontekstno neodvisne gramatike

V teoretičnem računalništvu obravnavamo jezik kot množico stavkov, sestavljenih iz neke končne množice besed, imenovane slovar. Sintakso programskih jezikov pogosto določamo z uporabo kontekstno neodvisnih gramatik. Slednje poleg slovarja besed T uporabljajo sintaktične kategorije N in prepisovalna pravila oblike $A \rightarrow \alpha$, kjer je $A \in N$ in α poljuben, lahko tudi prazen niz elementov $N \cup T$. Prepisovalna pravila vzpostavijo relacijo *izpeljave* med nizi elementov iz $N \cup T$: niz $\beta = \beta_1 A \beta_2$ je v relaciji z nizom $\gamma = \beta_1 \alpha \beta_2$, če gramatika vsebuje prepisovalno pravilo $A \rightarrow \alpha$.

Za stavek w pravimo, da je v jeziku gramatike, če obstaja *izpeljava* oziroma sekvenca nizov $w_0, w_1, \dots, w_n$, kjer $w_0 = S$ in je $S \in N$ začetna sintaktična kategorija, w_i je v relaciji izpeljave z w_{i+1} za vse $0 \leq i < n$ in $w_n = w$. Jeziku, ki ga določa kontekstno neodvisna gramatika, pravimo kontekstno neodvisen jezik. Zanima nas, ali je množica kontekstno neodvisnih jezikov zaprta za operacije preseka, unije in razlike množic.

Literatura: [13] in drugo poglavje v [15]

7. Neskončna družina kriterijev deljivosti

Uporabni kriteriji deljivosti se nanašajo na preverjanje deljivosti naravnih števil z relativno nizkimi števili, kot so 3, 8 ali 11. Nimamo pa orodja, ki bi nam omogočalo zasnovo testov za poljubno veliko podano število. Predstavili bomo metodo za razvoj kriterija deljivosti s podanim lihim praštevilom $p \neq 5$. Še več, glede na to, da metoda sloni le na predpostavki, da sta p in 10 tuji števili, je edini pogoj za uporabo metode to, da za podano število p velja $D(p, 10) = 1$.

Metoda je preprosta. Če se p konča na 1 ali 9, določimo k tako, da velja $p = 10k \pm 1$. Če pa se p konča na 3 ali 7, določimo k tako, da velja $3p = 10k \pm 1$. V vsakem primeru je kriterij deljivosti pozitivnega celega števila n s p ekvivalenten kriteriju deljivosti števila $(n - a_0)/10 \mp ka_0$, kjer je a_0 zadnja številka števila n . Na primer, za $p = 37$ velja $3p = 111 = 10 \cdot 11 + 1$, torej je $k = 11$. Zato je preverjanje deljivosti $n = 2035$ s $p = 37$ ekvivalentno preverjanju deljivosti $203 - 5 \cdot 11 = 148$ s 37.

Literatura: [5]

8. Je krog ali ni krog?

Če narišemo krivuljo z implicitno enačbo $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ za $0 \leq x, y \leq 1$, je videti kot četrtina krožnice. Pa je ta krivulja res del neke krožnice? Odgovor je negativen: v resnici gre za del parabole, a kako to dokazati? Vprašanje lahko posplošimo in se vprašamo: za katere vrednosti eksponenta $r > 0$ je krivulja z implicitno enačbo $x^r + y^r = 1$ za $0 \leq x, y \leq 1$ del neke stožnice?

Literatura: [1]

9. Koliko ničel polinoma leži na enotski krožnici?

Vse ničle polinoma $z^n - 1$ ležijo na enotski krožnici v kompleksni ravnini: to so ravno n -ti koreni enote. Kaj pa se zgodi, če polinomu dodamo še en člen: koliko ničel polinoma $z^n + z^k - 1$, kjer je $0 < k < n$, leži na enotski krožnici? Pri odgovoru nam pomagajo rešitve linearne diofantske enačbe z dvema neznankama.

Literatura: [2]

10. Kvantno računanje

Kvantni računalniki počasi postajajo realnost. Kako deluje tak računalnik? Za katere računske probleme so kvantni algoritmi hitrejši od klasičnih?

nih? Ali bo nadaljnji uspešni razvoj kvantnih računalnikov pripeljal do revolucije v računalništvu, kriptografiji in matematiki?

Literatura: [10] in [11]

11. *Aksiom izbire*

Če sta A in B dani množici, lahko njun kartezični produkt definiramo kot $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$. Lahko pa ga definiramo tudi kot množico vseh funkcij $f : \{1, 2\} \rightarrow A \cup B$, za katere velja, da je $f(1) \in A$ in $f(2) \in B$.

Slednjo definicijo lahko posplošimo do produkta poljubne družine množic $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in I}$. Velja

$$\prod_{\lambda \in I} A_\lambda = \left\{ f : f \in \left(\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \right)^I \wedge \forall \lambda \in I : f(\lambda) \in A_\lambda \right\}.$$

Zdi se, da je množica $\prod_{\lambda \in I} A_\lambda$ neprazna takoj, ko so neprazne vse množice družine $\mathcal{A}$. Leta 1963 je Paul J. Cohen pokazal, da je ta trditev nedokazljiva iz drugih aksiomov Zermelo-Fraenklove teorije množic. Treba jo je bilo privzeti kot nov aksiom. Koliko matematike pravzaprav sloni na tem aksiomu in kakšne bi bile posledice, če ga ne bi privzeli?

Literatura: poglavje VI, str. 122–151 v [12], [9] in razdelek 9, str. 92–106 v [6]

Literatura

- [1] Hassan Boualem and Robert Brouzet. To be (a circle) or not to be? *The College Mathematics Journal*, 46(3):197–206, 2015. doi:10.4169/college.math.j.46.3.197.
- [2] Michael Brilleslyper and Beth Schaubroeck. Locating unimodular roots. *The College Mathematics Journal*, 45(3):162–168, 2014. doi:10.4169/college.math.j.45.3.162.
- [3] Francesco Ciraulo and Samuele Maschio. Solving knights-and-knives with one equation. *The College Mathematics Journal*, 51(2):82–89, 2020. doi:10.1080/07468342.2020.1698931.
- [4] C. Bryan Dawson. Calculus limits unified and simplified. *The College Mathematics Journal*, 50(5):331–342, 2019. doi:10.1080/07468342.2019.1662706.
- [5] Darrin Frey and Adam Hammett. An infinite family of divisibility tests. *The College Mathematics Journal*, 52(1):2–10, 2021. doi:10.1080/07468342.2021.1845530.
- [6] Milan Hladnik. Moderna kvadratura kroga. 1995.

- [7] Tiffany N. Kolba and Jonathan Beagley. Counting christmas trees. *The College Mathematics Journal*, 52(5):338–344, 2021. doi:10.1080/07468342.2021.1967674.
- [8] Oscar Levin and Tyler Markkanen. Puzzles of cardinality. *The College Mathematics Journal*, 52(4):243–253, 2021. doi:10.1080/07468342.2021.1941539.
- [9] Greg Muller. The axiom of choice is wrong. URL: <https://cornellmath.wordpress.com/2007/09/13/the-axiom-of-choice-is-wrong/>.
- [10] Matija Pretnar. Osnove kvantnega računalništva, 1. del. *Obzornik za matematiko in fiziko*, 60:201–211, 2013.
- [11] Matija Pretnar. Osnove kvantnega računalništva, 2. del. *Obzornik za matematiko in fiziko*, 61:41–51, 2014.
- [12] Niko Prijatelj. Matematične strukture i. 1996.
- [13] Stephen Scheinberg. Note on the boolean properties of context free languages. *Information and Control*, 3(4):372–375, 1960. doi:10.1016/S0019-9958(60)90965-7.
- [14] Phillip H. Schmidt. Two friends and a bike. *The College Mathematics Journal*, 52(1):11–21, 2021. doi:10.1080/07468342.2021.1848198.
- [15] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Course Technology, Boston, MA, second edition, 2006.