

Limite in zveznost funkcij

1. Po definiciji izračunaj

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2.$$

2. Po definiciji dokaži, da velja

$$\lim_{x \downarrow 0} \sqrt{x} = 0.$$

3. Po definiciji dokaži, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

4. Izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

(n) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

(o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

(p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m-a^m}{x-a}$

(r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

(s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1-\cos x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(t) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\tan \pi x}{x+3}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(u) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1+2 \sin^2 x}{x^2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{\sqrt{ax-a}}, \quad a > 0$

(w) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

(k) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(x) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(l) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}, \quad a \neq 0$

(y) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$

(m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$

(z) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+1}{x^3-1} \right)^{x^3+2x}$

Rešitev:

- | | |
|--------------------------|-------------------|
| (a) 4 | (n) $\ln 2$ |
| (b) $-\frac{1}{2}$ | (o) 4 |
| (c) Limita ne obstaja. | (p) 0 |
| (d) $\frac{2}{3}$ | (q) 5 |
| (e) ma^{m-1} | (r) 2 |
| (f) -1 | (s) 2 |
| (g) 1 | (t) π |
| (h) $-\frac{1}{56}$ | (u) 0 |
| (i) $\frac{1}{2}$ | (v) $\frac{7}{4}$ |
| (j) $\sqrt{\frac{2}{a}}$ | (w) 1 |
| (k) $3x^2$ | (x) e^{-1} |
| (l) $\frac{a-1}{2a}$ | (y) e |
| (m) -1 | (z) e^2 |

5. Določi asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 1}.$$

Rešitev: Navpična asimptota je $x = 1$, poševna asimptota je $2x + 3$.

6. Določi asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Rešitev: Funkcija nima nobene navpične asimptote. Vodoravni asimptoti sta $y = 0$ (ko $x \rightarrow \infty$) in $y = 2$ (ko $x \rightarrow -\infty$).

7. Določi poševno asimptoto funkcije

$$f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Rešitev: $x + \frac{3}{2}$

8. Določi poševno asimptoto funkcije

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^3 + 5} - x^2.$$

Rešitev: $\frac{3}{2}x - \frac{9}{8}$

9. Določi levo in desno limito funkcije

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

v točki $x = 0$.

Rešitev: Leva limita ne obstaja, ker se vrednosti bližajo ∞ . Desna limita je enaka 0.

10. Po definiciji dokaži, da je funkcija $f(x) = x^2$ zvezna povsod na realni osi.

11. Po definiciji dokaži, da je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ zvezna, kjer je definirana.

12. Po definiciji dokaži, da funkcija

$$\text{step}(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

ni zvezna v točki 0.

13. Nariši grafa funkcij $f(x) = \frac{x+2}{x+2}$ in $g(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$. Kako je z njuno zveznostjo?

Rešitev: Nobena od funkcij ni zvezna, vendar funkcijo f lahko zvezno razširimo v točki $x = -2$, če definiramo $f(-2) = 1$.

14. Poišči vse vrednosti parametrov a in b , pri katerih je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 3 \\ a & ; x = 3 \\ x + b & ; x > 3 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

Rešitev: $a = 9$, $b = 6$.

15. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 & ; x \leq -1 \\ c \arctan x & ; x > -1 \end{cases}.$$

Določi konstanto c tako, da bo funkcija f zvezna na vsej realni osi.

Rešitev: $c = -\frac{4}{\pi}$

16. Pri katerih vrednostih parametra a je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} & ; x > 0 \\ 2^{x-2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

zvezna na celi realni osi?

Rešitev: $a \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

17. Določi tako realno število a , da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{1}{x+2}} & ; x < -2 \\ ax + 2 & ; x \geq -2 \end{cases}$$

zvezna.

Rešitev: $a = 1$

18. Določi, za katere $a \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{x^2} & ; x > 0 \\ 4 \cos x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

zvezna na vsej realni osi.

Rešitev: $a \in \{-2, 2\}$

19. Ali ima polinom $f(x) = x^7 - x + 1$ ničlo na intervalu $[-2, 0]$?

Rešitev: Da

20. Dokaži, da ima enačba $-x + 2 = \ln x$ vsaj eno rešitev na intervalu $[1, 2]$.

21. Dokaži, da ima enačba $x^3 + 2x + 1 = 0$ natanko eno rešitev.