

1. teden

1. Prazna množica je množica x z lastnostjo $\forall y(y \notin x)$. Dokaži, da obstaja natanko ena prazna množica.
2. Dokaži
 - (a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;
 - (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
3. Za poljubni množici x in y , dokaži, da obstajajo množice
 - (a) $x \cup y$ definirana s predpisom $z \in x \cup y \iff z \in x \vee z \in y$;
 - (b) $x \cap y$ definirana s predpisom $z \in x \cap y \iff z \in x \wedge z \in y$;
 - (c) $x \setminus y$ definirana s predpisom $z \in x \setminus y \iff z \in x \wedge z \notin y$.
4. Naj bo $\{X_i\}_{i \in Y}$ družina množic indeksirana z razredom $\underline{Y}$. Dokaži, da če je Y množica, je $\bigcup_{i \in Y} X_i := \{y \mid \exists i \in Y (y \in X_i)\}$ tudi množica.
5. Za poljubni množici X in y definirajmo urejeni par $(x, y)_K := \{\{x, y\}, \{x\}\}$. Dokaži, da za poljubne množice x, x', y, y' velja
$$(x, y)_K = (x', y')_K \iff x = x' \wedge y = y'.$$
6. Dokaži, da je za poljubni množici X in Y tudi kartezični produkt $X \times Y$ (kot je definiran na predavanjih) množica.
7. Za funkcijo $F : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ definirajmo $\text{gr}(F) := \{(x, y) \mid x \in \underline{X}, y = F(x)\}$. Dokaži, da če je X množica, je tudi $\text{gr}(F)$ množica.
8. Dokaži, da če je Y množica, je Y^X (kot je definiran na predavanjih) tudi množica. (Namig: dokaži, da je neka konkretna konstrukcija Y^X množica in uporabi dejstvo, da so vse konstrukcije med sabo izomorfne.)

2. teden

1. Naj bo $\emptyset \in \underline{X}$ in $X^+ \in \underline{X}$ za vsak $X \in \underline{X}$. Dokaži, da je $\nu N \subseteq \underline{X}$.
2. Naj bo X von Neumannovo število. Dokaži naslednje trditve:
 - (a) X je množica von Neumannovih števil;
 - (b) X je tranzitivna množica (tj. če je $Y \in X$, je $Y \subseteq X$);
 - (c) $X \notin X$.
3. Naj bosta X in Y von Neumannovi števili in $X^+ = Y^+$. Dokaži, da je $X = Y$.
4. Naj bo $(\underline{N}, \underline{S}, 0, +, \cdot, \leq)$ struktura tipa naravnih števil opremljena s seštevanjem, množenjem in linearnim urejanjem ($x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff}$ obstaja t , tako da je $x + t = y$). Za poljubne $x, y, z \in \underline{N}$ dokaži, da veljajo naslednje formule:
 - (a) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
 - (b) $0 + x = x$;
 - (c) $\underline{S}(x) = \underline{S}(0) + x$;
 - (d) $x + y = y + x$;
 - (e) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
 - (f) če je $x \leq y$, potem je $x + z \leq y + z$.

Dokaz. Operacija $+$ je definirana kot funkcija $\underline{R} : \underline{N} \times \underline{N} \rightarrow \underline{N}$, tako da je $\underline{R}(x, 0) = x$ in $\underline{R}(x, \underline{S}(y)) = \underline{S}(\underline{R}(x, y))$. V strukturi $\underline{N}$ velja indukcija, ki jo bomo uporabili v dokazih vseh formul.

IP pomeni “po induksijski predpostavki.”

- (a) Uporabimo indukcijo po z .

$$z = 0: (x + y) + 0 = \underline{R}(\underline{R}(x, y), 0) = \underline{R}(x, y) = \underline{R}(x, \underline{R}(y, 0)) = x + (y + 0)$$

$$\begin{aligned} z \rightarrow \underline{S}(z): (x + y) + \underline{S}(z) &= \underline{R}(\underline{R}(x, y), \underline{S}(z)) = \underline{S}(\underline{R}(\underline{R}(x, y), z)) \stackrel{\text{IP}}{=} \\ &= \underline{S}(\underline{R}(x, \underline{R}(y, z))) = \underline{R}(x, \underline{S}(\underline{R}(y, z))) = \underline{R}(x, \underline{R}(y, \underline{S}(z))) = \\ &= x + (y + \underline{S}(z)) \end{aligned}$$

□

5. Naj bo $(\underline{N}, \underline{S}, 0)$ struktura tipa naravnih števil in $n \in \underline{N}$ poljuben. Brez uporabe aksioma o neskončnosti dokaži, da je $[0, n) := \{x \in \underline{N} \mid 0 \leq x < n\}$ množica.

3. teden

1. Dokaži, da veljajo naslednje enakosti oziroma neenakosti.
 - (a) $|A \times B| = |B \times A|$.
 - (b) $|A| \leq |A \times B|$, če $B \neq \emptyset$.
 - (c) $|A| \leq |A^S|$, če $S \neq \emptyset$.
 - (d) $|A^S| \leq |A^T|$, če je $S \subseteq T$ in $A \neq \emptyset$.
 - (e) $|S| \leq |A^S|$, če je $|A| \geq 2 = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|$.
2. Dokaži, da iz $|X'| \ll |Y'|$ sledi $|X'| \leq |X| \ll |Y| \leq |Y'|$.
3. Funkcija $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ je *monotona*, če iz $X \subseteq Y \subseteq A$ sledi $f(X) \subseteq F(Y)$.
Fiksna točka funkcije $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ je množica $X \subseteq A$, za katero je $F(X) = X$.
 - (a) Dokaži, da ima vsaka monotona funkcija $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ fiksno točko.
(Namig: $\bar{X} := \bigcap T$ je fiksna točka.)
 - (b) Uporabi izrek o fiksni točki za dokaz leme iz Schröder–Bernsteinovega izreka.
[Če je $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$ in $|A_1| = |A_0|$, potem je $|A_0| = |B_0|$.] (Namig: C je fiksna točka funkcije $F(X) := (A_0 \setminus B_0) \cup f[X]$, kjer je $f : A_0 \rightarrow A_1$ bijekcija.)

Definirajmo, da je množica X končna natanko tedaj, ko obstaja bijekcija $f : [0, n) \rightarrow X$ za neko naravno število n .

4. Dokaži naslednje trditve.
 - (a) Če je X končna množica in $Y \subseteq X$, je Y končna množica.
 - (b) Če sta X in Y končni množici, je $X \cup Y$ končna množica.
 - (c) Če je X končna množica in $F : X \rightarrow Y$ poljubna funkcija, je $F[X]$ končna množica in $|F[X]| \leq |X|$.

Dokaz. Bijekcija iz zgornje definicije določa oštevilčenje elementov množice $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Obratno tudi vsako oštevilčenje določa bijekcijo iz $[0, n)$ v X .

- (a) Naj bo $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. S pomočjo indukcije sestavimo oštevilčenje $Y = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$. Privzamemo lahko, da $Y \neq \emptyset$. V nasprotnem primeru je prazna funkcija bijekcija med $[0, 0) = \emptyset$ in Y .

$i = 0$: Naj bo $\ell := \min\{0 \leq k < n \mid x_k \in Y\}$ in $y_0 := x_\ell$.

$i \rightarrow i + 1$: Naj bo $A := \{y_0, \dots, y_i\} \subseteq Y$. Če je $A = Y$, je $m = i + 1$ in oštevilčenje je končano. Če pa $A \neq Y$, definiramo

$\ell := \min\{0 < k < n \mid x_k \in Y \setminus A\}$

in $y_{i+1} := x_\ell$.

□

4. teden

1. Naj bosta X in Y neskončni števni množici. Dokaži naslednji trditvi:
 - (a) $X \times Y$ je neskončna števna množica;
 - (b) $X \cup Y$ je neskončna števna množica.
2. Naj bosta X in Y poljubni množici.
 - (a) Če sta X in Y disjunktni, potem je $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.
 - (b) Poišči primer množic, tako da $|X \cup Y| \neq |X| + |Y|$.
3. Naj bodo X , Y in Z poljubne množice. Dokaži naslednji trditvi:
 - (a) $|X| \cdot (|Y| + |Z|) = |X| \cdot |Y| + |X| \cdot |Z|$;
 - (b) $(|X| \cdot |Y|)^{|Z|} = |X|^{|Z|} \cdot |Y|^{|Z|}$.
4. Dokaži, da vsako množico X velja $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.
5. Naj bo $|Y|$ lasten kvadrat in $2 \leq |X| \leq |Y|$. Dokaži, da je $|X| + |Y| = |X| \cdot |Y| = |Y|$.
6. Naj bo $2 \leq |X|$ lasten kvadrat. Dokaži naslednje trditve:
 - (a) $n < |X|$ za vsak $n \in \mathbb{N}$;
 - (b) $n \cdot |X| = |X|$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;
 - (c) $n^{|X|} = 2^{|X|}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
 - (d) $|X|^{|X|} = 2^{|X|}$;
 - (e) če je $2 \leq |Y| \leq |X|$, potem je $|Y|^{|X|} = 2^{|X|}$.
7. Dokaži, da imajo naslednje množice kardinalnost kontinuum ($= 2^{\aleph_0}$):
 - (a) $\mathbb{R}^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;
 - (b) množica neskončnih zaporedij naravnih števil;
 - (c) množica neskončnih zaporedij realnih števil;
 - (d) množica zveznih funkcij iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.
8. Izračunaj kardinalnost množice $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ in kardinalnost množice vseh nezveznih funkcij iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.

5. teden

1. Izračunaj:

(a) $1 + \omega$;

(b) $2 \cdot \omega$;

(c) $2^{\omega+1}$.

2. Naj bodo α, β in γ poljubna ordinalna števila. Katere od spodnjih trditev so pravilne:

(a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$; (d) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$; (g) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$;

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$; (e) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$; (h) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$;

(c) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$; (f) $\alpha\beta = \beta\alpha$; (i) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

3. Poenostavi naslednje izraze:

(a) $(\omega + 1) + \omega$;

(b) $(\omega \cdot k + 1) + (\omega + 1)$ za $k \in \mathbb{N}$;

(c) $\omega + \omega^2$;

(d) $(\omega + 1)\omega^2$;

(e) 2^ω (primerjaj z ω^ω).

4. Naj bodo α, β in γ poljubna ordinalna števila in $\alpha < \beta$. Dokaži naslednje trditve:

(a) $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$;

(b) če je $\gamma > 0$, potem je $\gamma\alpha < \gamma\beta$;

(c) če je $\gamma > 1$, potem je $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$.

Iz zgornjih rezultatov sklepaj naslednje:

(a) if $\beta > 0$ then $\alpha < \alpha + \beta$;

(b) if $\alpha > 0$ and $\beta > 1$ then $\alpha < \alpha\beta$;

(c) if $\alpha, \beta > 1$ then $\alpha < \alpha^\beta$.

5. Poišči najmanjše ordinalno število x , za katerega velja

(a) $\omega + x = x$;

(b) $\omega \cdot x = x$;

(c) $\omega^x = x$.

6. Naj bo λ poljubno ordinalno število, $\underline{X}$ poljuben razred, $z \in \underline{X}$, $\underline{S} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ in $\underline{\ell} : \mathcal{P}(\underline{X}) \rightarrow \underline{X}$. λ -aproximacija je preslikava $f : \downarrow \lambda \rightarrow \underline{X}$, tako da velja:

- (a) $f(0) = z$;
- (b) $f(\alpha + 1) = \underline{S}(f(\alpha))$ za vsak $\alpha < \lambda$;
- (c) $f(\alpha) = \underline{\ell}(f(\{\beta \mid \beta < \alpha\}))$ za vsak limiten $\alpha < \lambda$.

Privzemimo, da je λ limitno ordinalno število in da obstaja enolično določena λ -aproximacija. Dokaži, da obstaja enolično določena $(\lambda + 1)$ -aproximacija.

X je von Neumannovo ordinalno število, če za vsak $Y \subseteq X$, ki zadošča naslednjim pogojem

- (a) $\emptyset \in X \implies \emptyset \in Y$
- (b) $\forall Z \in Y (Z^+ \in X \implies Z^+ \in Y)$
- (c) $\forall W \subseteq Y (\bigcup W \in X \implies \bigcup W \in Y)$

velja, da je $Y = X$.

7. Naj bo α von Neumannovo ordinalno število. Dokaži, da je $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ tudi von Neumannovo ordinalno število.

Dokaz. Vzemimo poljuben $Y \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$, ki izpolnjuje (a), (b) in (c). Definirajmo $Y' := Y \setminus \{\alpha\} \subseteq \alpha$. Ker je α von Neumannovo ordinalno število in Y' zadošča pogojem (a), (b) in (c), je $Y' = \alpha$. Moramo samo še dokazati, da je $\alpha \in Y$. To pa sledi bodisi iz (b) (če je α nasledniško število) bodisi iz (c) (če je α limitno). $\square$

8. Naj bo X množica von Neumannovih ordinalnih števil. Dokaži, da je $\bigcup X$ tudi von Neumannovo ordinalno število.

6. teden

1. Katere od naslednjih množic so dobro urejene:

- (a) $(\mathbb{N}, >)$;
- (b) $(\mathbb{N}, |)$;
- (c) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{\text{lex}})$;
- (d) $(\{0\} \times \mathbb{N} \cup \{1\} \times \mathbb{Z}, <_{\text{lex}})$;
- (e) $(\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, <)$;
- (f) $(\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}, <_*)$, kjer je $m <_* n \stackrel{\text{def}}{\iff} m < n$ in $n <_* \mathbb{N}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$;
- (g) $0, 2, 4, 6, \dots, 1, 3, 5, 7, \dots$

2. Naj bo X dobro urejena množica.
 - (a) Dokaži, da ima vsak element, ki ni maksimalen, neposrednega naslednika.
 - (b) Ali ima vsak element, ki ni minimalen, neposrednega predhodnika?
3. Naj bosta X in Y izomorfni dobro urejeni množici in $f : X \rightarrow Y$ izomorfizem.
 - (a) Če je x' neposredni predhodnik elementa x v X , je $f(x')$ neposredni predhodnik $f(x)$ v Y .
 - (b) Če je x' neposredni naslednik elementa x v X , je $f(x')$ neposredni naslednik $f(x)$ v Y .
 - (c) Če je $\emptyset \neq A \subseteq X$ in $x = \min A$, je $f(x) = \min f[A]$.
4. Naj bosta X in Y dobro urejeni množici.
 - (a) $X + Y$ je dobro urejena z relacijo $<_{X+Y}$;
 - (b) $X \times Y$ je dobro urejena z relacijo $<_{X \times Y}$.
5. (Nekomutativnost seštevanja)
 - (a) Velja $(\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}, <_*) \cong (\mathbb{N} + \{\mathbb{N}\}, >_+) \not\cong (\mathbb{N}, <)$.
 - (b) Velja $(\{\mathbb{N}\} + \mathbb{N}, <_+) \cong (\mathbb{N}, <)$.
6. (Nekomutativnost množenja) Naj bo X dobro urejena množica.
 - (a) Velja $(X \times 2, <_\times) \cong (X + X, <_+)$.
 - (b) Ali $(2 \times X, <_\times) \cong (X + X, <_+)$ vedno velja?
7. (a) (Distributivnost z leve) Naj bodo X , Y in Z dobro urejene množice. Velja $(X \times (Y + Z), <_\times) \cong (X \times Y + X \times Z, <_+)$. (Namig: Ista bijekcija kot pri distributivnosti množenja pri kardinalnostih.)
 - (b) (Nedistributivnost z desne)
Dokaži $((\mathbb{N} + \{\mathbb{N}\}) \times \{0, 1\}, <_\times) \not\cong (\mathbb{N} \times \{0, 1\} + \{\mathbb{N}\} \times \{0, 1\}, <_+)$.

7. teden

1. (a) Privzemimo, da je množico B moč dobro urediti in da obstaja injektivna funkcija iz množice A v B . Pokaži, da je A moč dobro urediti.
- (b) Privzemimo, da je množico A moč dobro urediti in da obstaja surjektivna funkcija iz A v množico B . Pokaži, da je B moč dobro urediti.

2. Če je neskončno množico X moč dobro urediti, potem obstajajo neizomorfna dobra urejanja na X .
3. (a) Naj bosta α in β števni ordinalni števili. Dokaži, da je α^β števno ordinalno število.
 (b) Naj bosta α in β ordinalni števili in $|\downarrow\alpha| \leq \aleph_\gamma$, $|\downarrow\beta| \leq \aleph_\gamma$. Dokaži, da je $|\downarrow(\alpha + \beta)| \leq \aleph_\gamma$, $|\downarrow(\alpha \cdot \beta)| \leq \aleph_\gamma$ in $|\downarrow(\alpha^\beta)| \leq \aleph_\gamma$.
4. (a) Dokaži, da je ω_α inicialno ordinalno število za vsako ordinalno število α .
 (b) Naj bo γ neskončno inicialno ordinalno število. Dokaži, da obstaja ordinalno število α , tako da je $\gamma = \omega_\alpha$.
5. Naj bo X množica in $|X| < \aleph_\alpha$. Dokaži, da obstaja $\beta < \alpha$, tako da je $|X| = \aleph_\beta$.
6. Naj bo $f : \downarrow\omega_\alpha \rightarrow X$ surjektivna preslikava. Dokaži, da je $|X| \leq \aleph_\alpha$.
7. Naj bo $X \subseteq \downarrow\omega_\alpha$ in $|X| < \aleph_\alpha$. Dokaži, da je $|\downarrow\omega_\alpha \setminus X| = \aleph_\alpha$.
8. Definirajmo relacijo $<$ na razredu $\text{Ord} \times \text{Ord}$ s predpisom: $(\alpha_1, \alpha_2) < (\beta_1, \beta_2) \stackrel{\text{def}}{\iff}$
 - $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} < \max\{\beta_1, \beta_2\}$ ali
 - $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ in $\alpha_1 < \beta_1$ ali
 - $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ in $\alpha_1 = \beta_1$ in $\alpha_2 < \beta_2$.
 (a) Dokaži, da je $<$ dobra urejenost na $\text{Ord} \times \text{Ord}$.
 (b) Dokaži, da je za vsako ordinalno število α množica $\downarrow\alpha \times \downarrow\alpha$ začetni segment $\text{Ord} \times \text{Ord}$.

8. teden

1. Naj bo $(X, <)$ linearno urejena množica. Dokaži, da ima vsaka družina nepraznih končnih podmnožic množice X funkcijo izbire.
2. Naj bo X dobro urejena. Dokaži, da je $\mathcal{P}(X)$ moč linearno urediti.
3. Dokaži, da ima vsaka končna družina nepraznih množic funkcijo izbire.
4. Recimo, da ima potenčna množica vsake množice funkcijo izbire. Dokaži, da ima vsaka družina nepraznih množic funkcijo izbire.

5. S pomočjo DC dokaži Kőnigovo lemo. (Če je T neskončno drevo, v katerem je vsak nivo končen, potem obstaja neskončna veja v T .)
6. Hausdorffov maksimalni princip je trditev, da je vsaka linearno urejena podmnožica delno urejene množice vsebovana v maksimalni linearno urejeni množici. Dokaži, da je Hausdorffov maksimalni princip ekvivalenten Zornovi lemi.
7. Funkcija $S : X \rightarrow Y$ je *sekcija* funkcije $f : Y \rightarrow X$, če je $f \circ S = id_X : X \rightarrow X$. Dokaži, da je aksiom izbire ekvivalenten trditvi, da ima vsaka surjektivna funkcija sekcijo.
8. Naj bo I množica in $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ družina množic. Kartezični produkt $\mathcal{X}$ je množica $\prod \mathcal{X} = \prod_{i \in I} X_i := \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i\}$. Dokaži, da je aksiom izbire ekvivalenten trditvi, da kartezični produkt neprazne družine množic neprazen.

9. teden

1. Naj bosta κ in λ kardinalnosti. Dokaži naslednji enakosti:

$$(a) \sum_{\alpha < \lambda} \kappa = \lambda \cdot \kappa;$$

$$(b) \prod_{\alpha < \lambda} \kappa = \kappa^\lambda.$$

2. Naj bodo $\kappa, \kappa_i, \lambda, \lambda_i$ kardinalnosti. Dokaži naslednji enakosti:

$$(a) \left(\prod_{i \in I} \kappa_i \right)^\lambda = \prod_{i \in I} \kappa_i^\lambda;$$

$$(b) \prod_{i \in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum_{i \in I} \lambda_i}.$$

3. (a) Pokaži, da velja enakost $\left| \prod_{0 < \alpha < \omega_1} \downarrow \alpha \right| = 2^{\aleph_1}$.

$$(b) \text{ Izračunaj } \prod_{n < \omega} 2^{\aleph_n}.$$

$$(c) \text{ Če je } 2^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha, \text{ potem velja } \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}.$$

4. Izračunaj kofinalnosti števil:

$$(a) \aleph_{\omega^\omega}$$

$$(b) \aleph_{\omega_\omega}$$

$$(c) \aleph_{\omega_{\omega_1}}$$

10. teden

1. Naj bo $\alpha \notin \underline{\text{Card}}$ poljuben. Dokaži, da je $\text{cf}(\alpha) < \alpha$. Ali velja enakost, če je $\alpha \in \underline{\text{Card}}$?
2. Naj bo α poljubno ordinalno število. Dokaži, da je $\text{cf}(\text{cf}(\alpha)) = \text{cf}(\alpha)$.
3. Naj bo $\aleph_\alpha$ limitno kardinalno število in $\alpha > 0$. Dokaži, da je $\text{cf}(\alpha) = \text{cf}(\aleph_\alpha)$.
4. Dokaži, da obstaja singularno kardinalno število κ , tako da je $\kappa = \aleph_\kappa$.
5. Naj bo $\aleph_\alpha$ krepko limitno kardinalno število (strong limit cardinal) in $\kappa, \lambda < \aleph_\alpha$. Dokaži, da je $\kappa^\lambda < \aleph_\alpha$.
6. Naj bo α ordinalno število. Dokaži naslednje lastnosti kumulativne hierarhije:
 - (a) V_α je tranzitivna množica;
 - (b) če je $\beta < \alpha$, potem je $V_\beta \subset V_\alpha$;
 - (c) če je $x \in V_\alpha$ in $y \in x$, potem obstaja $\beta < \alpha$, tako da je $y \in V_\beta$;
 - (d) če je $x \in V_\alpha$, potem je $\mathcal{P}(x) \in V_{\alpha+1}$;
 - (e) $V_\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$;
 - (f) če je α von Neumannovo ordinalno število, je $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$.

11. teden

1. (a) Dokaži, da je vsaka družina paroma disjunktnih odprtih množic realnih števil števna.
(b) Ali to velja za družine zaprtih množic?
2. Dokaži, da je vsaka odprta množica realnih števil števna unija zaprtih množic.
3. Naj bo $\alpha \in \underline{\text{Ord}}$ in $f : \downarrow \alpha \rightarrow \mathbb{R}$ vložitev (strogo naraščajoča preslikava). Dokaži, da je α števno število.
4. Naj bo A perfektna množica in a število, za katerega obstaja $x \in A$, tako da je $x > a$. Dokaži, da je ena od množic $A \cap [a, \infty)$ ali $A \cap (a, \infty)$ perfektna.
5. Naj bo A' izpeljanka množice $A \subseteq \mathbb{R}$. Dokaži, da veljata naslednji ekvivalenci.
 - (a) A je zaprta $\iff A' \subseteq A$.
 - (b) A je perfektna $\iff A' = A$ in $A \neq \emptyset$.

6. Definirajmo $F := \{1\} \cup \{1 - \frac{1}{2^n} \mid n \geq 1\} \cup \{1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+m}} \mid n, m \geq 1\}$.
- (a) Dokaži, da je F zaprta.
 - (b) Izračunaj F' , F'' in F''' .
 - (c) Poišči števno zaprto množico G , tako da je $G''' \neq \emptyset$.
 - * (d) Poišči števno zaprto množico H , tako da je vsaka njena končna izpeljanka neprazna.

12. teden

1. Ugotovi, kje v Borelovi hierarhiji se naslednje množice pojavijo prvič:
 - (a) poljubna števna množica;
 - (b) $B_n := \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ ima } 5 \text{ na } n\text{-tem mestu v decimalnem zapisu}\}$;
 - (c) $C := \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ ima } 5 \text{ v decimalnem zapisu}\}$;
 - (d) $D := \{r \in \mathbb{R} \mid 5 \text{ nastopa neskončnokrat v decimalnem zapisu } r\}$.
2. Let $X \subseteq \mathbb{R}$ be an arbitrary set. Recall the following game from lectures.
 - $A_0 = \mathbb{R}$;
 - In round $n + 1$, Player I chooses $p, q, p', q' \in \mathbb{Q}$ such that $p < q < p' < q'$ and $[p, q] \cup [p', q'] \subseteq A_n$ and $\max(q - p, q' - p') < \frac{1}{2^{n+1}}$.
 - Player II then chooses $b \in \{0, 1\}$. This determines

$$A_{n+1} := \begin{cases} [p, q] & \text{if } b = 0 \\ [p', q'] & \text{if } b = 1 \end{cases}$$

Player I wins the game if and only if for $\{x\} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ it holds that $x \in X$.

- (a) The lecture described a winning strategy for Player II if X is countable, and a winning strategy for Player I if X has a perfect subset. Prove that these strategies are well-defined and have the properties claimed.
- (b) Suppose that Player I has a winning strategy. Prove that X has a perfect subset.
- (c) Suppose that Player II has a winning strategy τ .

We call a finite sequence of moves $a_0 b_0 a_1 b_1 \dots a_{n-1} b_{n-1}$ (each $a_i \in \mathbb{Q}^4$ and $b_i \in \{0, 1\}$) a τ -sequence if it follows the rules of the game with Player II using strategy τ . Such a τ -sequence determines a closed interval $A_n \subseteq \mathbb{R}$. For any $x \in \mathbb{R}$, a τ -sequence is said to be *maximal for* x if $x \in A_n$ and, for every longer τ -sequence $a_0 b_0 \dots a_{n-1} b_{n-1} a_n b_n$, it holds that $x \notin A_{n+1}$.

- i. Suppose that a τ -sequence is maximal for both x and x' . Prove that $x = x'$.
- ii. Prove that, for every $x \in X$, there exists a τ -sequence that is maximal for X . (Hint: suppose not and show that Player I then has a winning play against τ .)
- iii. Conclude that the set X is countable.