

LINEARNA ALGEBRA 2021/22
VAJE: vektorski prostori

Štirinajste vaje

1. Ali je – vektorski podprostor v – ?

a.) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^{2 \times 2}.$

b.) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^{2 \times 2}.$

c.) $W = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(x) = p(-x)\} \text{ v } \mathbb{R}_n[x].$

d.) $W = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p \text{ ima vsaj eno realno ničlo}\} \text{ v } \mathbb{R}_n[x], n \geq 2.$

2. Ali lahko abelovo grupo $\mathbb{Z}_4$ opremimo s skalarnim množenjem $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$, da bo $\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}_2$ -vektorski prostor?
3. Naj bodo $x = (-1, 2, 3)^T, y = (3, 4, 2)^T, z = (2, 6, 6)^T$ in $w = (-9, -2, 5)^T$. Ali sta $z, w \in \text{Lin}\{x, y\} \subset \mathbb{R}^3$?
4. Pokaži, da je $\{(1, 2, 3, 4)^T, (-2, 1, 0, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (2, -1, 0, 3)^T\}$ baza $\mathbb{R}^4$.

Petnajste vaje

1. Naj bo $U = \text{Lin}\{(2, 3, -1, 4)^T, (1, 2, 1, 2)^T, (4, 7, 1, 8)^T, (1, 1, -2, 2)^T\}$. Določi $\dim U$ in kakšno bazo.
2. Zapiši bazo vektorskega prostora rešitev enačbe

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

nad $\mathbb{Z}_5$ in $\mathbb{R}$.

3. Za vektorska podprostora U, V vektorskega prostora W dokaži ekvivalence

(i) $U + V = V \iff U \subseteq V$

(ii) $U \cap V = V \iff V \subseteq U$

(iii) $U + V = U \cup V \iff (U \subseteq V \text{ ali } V \subseteq U).$

Pokaži, da je $U \cup V$ vektorski podprostor natanko tedaj, ko je $(U \subseteq V \text{ ali } V \subseteq U)$.

4. S primerom pokaži, da za vektorske prostore v splošnem ne velja $V \cap (U + W) = (V \cap U) + (V \cap W)$ in $V + (U \cap W) = (V + U) \cap (V + W)$.

5. Naj bosta

$$U = \text{Lin}\{(0, 0, 1, 2, 0)^T, (1, 1, 1, 2, 2)^T, (1, 0, 1, -1, 0)^T\}$$

in

$$V = \text{Lin}\{(1, 1, 0, 0, 0)^T, (2, 1, 0, 0, 2)^T, (2, 0, 2, 1, 2)^T\}.$$

Poišči kakšno bazo $U + V$ in $U \cap V$. Poišči kakšno bazo komplementa $U \cap V$.

6. Naj bo $Q = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$ in $S = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(2) = 0\}$. Določi $Q + S$ in $Q \cap S$. Naj bo $V_n = V \cap \mathbb{R}_n[x]$. Poišči kakšno bazo S_n , Q_n , $Q_n \cap S_n$ in $Q_n + S_n$.

Šestnajste vaje

- Naj bo $U = \text{Lin}\{(1, 2, 2, 5, 1), (3, 6, 1, 2, 0), (2, 4, -1, 0, 1)\}$. Določi kakšen komplement vektorskega podprostora U v $\mathbb{R}^4$.
- Naj bo $U = V \oplus W$ in naj bo $V \subset Z \subset U$. Pokaži, da je $Z = V \oplus (Z \cap W)$.
- Naj bo W vektorski prostor in V, V' in V'' vektorski podprostori, za katere velja

$$W = V \oplus V' = V \oplus V''$$

Pokaži, da je $\dim(V' \cap V'') \geq \dim W - 2 \dim V$.

4. Prepričaj se, da bazi

$$B_1 = \{(1, 0, -1, 1)^T, (0, 1, -1, 1)^T\}$$

in

$$B_2 = \{(2, -1, -1, 1)^T, (1, 1, -2, 2)^T\}$$

določata isti vektorski podprostor. Določi prehodni matriki med bazama.

Sedemnajste vaje

- $B = \{(1, 2, 3, 4)^T, (-2, 1, 0, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (2, -1, 0, 3)^T\}$ je baza $\mathbb{R}^4$. Izrazi standardno bazo $\mathbb{R}^4$ z B . Menjavo baze zapiši s prehodno matriko.
- Kdaj je »linearna« funkcija $f(x) = ax + b$ linearna preslikava?
- Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) (= (1, 2, 0)) \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $A(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$. Preslikavi A določi pripadajočo matriko v standardni bazi.
Naj bo $\vec{b} \neq 0$ in $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. Pokaži, da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ baza $\mathbb{R}^3$. Preslikavi A določi pripadajočo matriko v tej bazi.
- Za linearno preslikavo $A: U \rightarrow V$ pokaži ekvivalenco naslednjih trditev.
 - A je bijektivna
 - Za vsako bazo $\{u_i \mid i = 1, \dots, m\}$ prostora U je $\{Au_i \mid i = 1, \dots, m\}$ baza prostora V .

c) Obstaja baza $\{u_i \mid i = 1, \dots, m\}$ prostora U , za katero je $\{Au_i \mid i = 1, \dots, m\}$ baza prostora V .

5. Pokaži, da je preslikava $A: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ podana s predpisom

$$A(p(x)) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$$

linearna.

Ali je izomorfizem? Za $n = 2$ preslikavi zapiši pripadajočo matriko v standardni bazi.