$\mathbb{R}[x]$ je kolobar brez del. niča, vendar ni obseg $\rightsquigarrow$

Kaj je obseg ulomkov?

$$\mathbb{R}(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \;\middle|\; q \neq 0 \right\}$$ je obseg ulomkov za $\mathbb{R}[x]$

K kolobar brez deliteljev niča. Kaj je obseg ulomkov za $K[x]$? D.N.

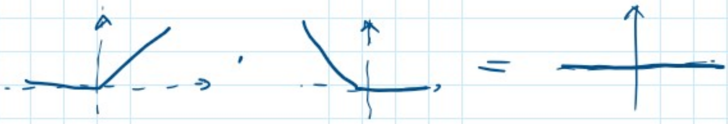
$\mathbb{Z}[x]$ kol. brez del. niča $\rightsquigarrow$ kaj je obseg ulomkov?

$\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{R}[x] \rightsquigarrow \mathbb{R}(x)$ $\qquad$ ↳ $\mathbb{Q}(x)$

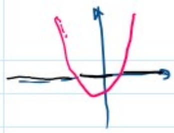
- v $\mathbb{Z}_n$:

$\mathbb{Z}_6$ $\quad$ $\underline{2} \cdot \underline{3} = \underline{0}$ $\qquad$ elementi $\mathbb{Z}_n$ so bodisi delitelji niča, bodisi so (že) obrnljivi

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f \cdot g \neq 0$ $\qquad$ $f \cdot g = 0$



(zvezne)
$C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\quad$ Ali je $f(x) = x^2 - 2$ del. niča? $\qquad$ Kaj pa $\sin(x)$?



$f \cdot g = 0 \Rightarrow g = 0$

- $M_n(\mathbb{R})$: Kaj so delitelji niča? $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

obrnljiva matrika = det $\neq 0$)

det $= 0$ $\qquad$ $A\vec{x} = \vec{0}$ $\qquad$ $A \cdot (\vec{x}\ \vec{x} \dots \vec{x}) = 0$

- v $\mathbb{Z}$ sta obrnljiva le 1 in -1, ni del. niča

Wedderburnov izrek (J. Wedderburn škotski matematik, izrek iz leta 1905)

Končen kolobar brez deliteljev niča je obseg.

Dokaz

vsi neničelni elementi so obrnljivi

$a \overset{\neq 0}{\in} K$ $\qquad$ $l_a: K \to K$, $x \mapsto a \cdot x$ $\qquad$ $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow \underbrace{a \cdot (x-y) = 0}_{\text{ni del. niča}} \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow l_a$ je tudi surjektivna $\quad$ $ax = 1$ ima rešitev, obstaja $a' \in K$; $a \cdot a' = 1$

$d_a : K \to K$, $x \mapsto x \cdot a$, injektivna zato tudi surjektivna

$\leadsto$ $x \cdot a = 1$ ima rešitev, $a'' \cdot a = 1$

$$a' = 1 \cdot a' = (a'' \cdot a) \cdot a' = a''(a \cdot a') = a'' \cdot 1 = a''$$

K je kolobar z deljenjem ✓

Velja: sledi, da je K tudi komutativen, torej je res obseg.

$\boxed{o}$

Posledica

$\mathbb{Z}_n$ je obseg $\iff$ n je praštevilo

☑

$\mathbb{Z}_{12}$ $\quad \underline{3} + \underline{3} + \underline{3} + \underline{3} = \underline{0}$ $\quad \underbrace{\underline{5} + \dots + \underline{5}}_{12} = \underline{0}$

$1 + 1 + 1 + \dots$

Karakteristika kolobarja K je najmanjši $n \in \mathbb{N}$, za katerega velja: $\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n} = 0$; če tak $\quad n1 = 0$

n ne obstaja, potem rečemo, da je karakt. $= 0$

char $K = n$ oz. char $K = 0$

$n1 = 0 \Rightarrow na = 0$ za vse $a \in K$

$$na = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n} = a \cdot (\underbrace{1 + \dots + 1}_{n}) = a \cdot 0 = 0$$

Trditev

(a) char K je najmanjši $n \in \mathbb{N}$, da velja $na = 0$

(b) če K nima deliteljev niča, potem je njegova karakteristika 0 ali pa praštevilo.

Dokaz (a) ✓

(b) $n = i \cdot j \quad i, j \neq 1 \qquad n1 = (ij)1 = (\underbrace{1 + \dots + 1}_{i}) \cdot (\underbrace{1 + \dots + 1}_{j}) \neq 0$

n ni sestavljeno $\leadsto$ n praštevilo

takega n ni $\leadsto$ char $= 0$

☑

posebej: karakteristika obsega je bodisi praštevilo ali 0

končen obseg ima praštevilsko karakteristiko

Posledica: karakteristika obsega je bodisi praštevilo ali 0

končen obseg ima praštevilsko karakteristiko

Primeri

$\operatorname{char} \mathbb{Z} = 0$

$\operatorname{char} \mathbb{Q} = 0 = \operatorname{char} \mathbb{R} = \operatorname{char} \mathbb{C}$

$\operatorname{char} \mathbb{Z}_n = n$

$\operatorname{char} K[x] = \operatorname{char} K$

$\operatorname{char} M_n(K) = \operatorname{char} K$

Homomorfizmi

K, L kolobarja

$f : K \to L$ je homomorfizem, če velja

$$f(a \underset{K}{+} b) = f(a) \underset{L}{+} f(b)$$

$$f(a \underset{K}{\cdot} b) = f(a) \underset{L}{\cdot} f(b) \quad , \text{ za poljubno izbiro } a, b \in K$$

Izomorfizem je bijektivni homomorfizem.

Primeri

- $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

  inkluzija podkolobarja v kolobar

- $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ $\qquad$ $\mathbb{Z}, +, \cdot \longrightarrow \mathbb{Z}_6, +, \cdot$

  $a \longmapsto \underset{\underline{a}}{\overset{\shortparallel}{a \bmod n}}$,

  $(a+b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$

  $\underline{a+b} = \underline{a} + \underline{b}$

  $\underline{a \cdot b} = \underline{a} \cdot \underline{b}$

- konjugiranje v $\mathbb{C}$

  $z, w \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\qquad$ $(\bar{\ }) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

  $a+bi \mapsto a-bi$ $\qquad$ $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

  izomorfizem (avtomorfizem, ker je domena = kodomena)

- $f_a: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, izberemo $a \in \mathbb{R}$

  $p(x) \longmapsto p(a)$

npr: $a = 0, 1, -1$

$p(x) = 2 + 3x - 4x^2 + x^3$

$p(0) = 2$ $\quad a=0 \quad f_0$ & polinom $\mapsto$ konstantni koeficient

$a=1 \quad f_1: p(x) \mapsto$ vsota koeficientov p

$a=-1 \quad f_{-1}: p(x) \mapsto$ alternirajoča vsota koeficientov

$2-(3)+(-4)-1$

f_a je homomorfizem

$$f_a(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))(a) = p(a)+q(a) = f_a(p(x)) + f_a(q(x))$$

$$f_a(p(x)\cdot q(x)) = p(a)\cdot q(a) = f_a(p(x))\cdot f_a(q(x))$$

Podobno je za zvezne funkcije $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$g \longmapsto g(a)$ homomorfizem

- $a \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

  $a+b \longmapsto \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $a\cdot b \longmapsto \begin{pmatrix} a\cdot b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  To je homomorfizem $\mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$k<\ell \quad M_k(\mathbb{R}) \longrightarrow M_\ell(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a+b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a\cdot b \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ <u>ni</u> homomorfizem

- odvajanje funkcij

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \neq f'\cdot g'$$

ni homomorfizem kolobarjev

- $x \longmapsto x^2$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x\cdot y)^2 = x^2\cdot y^2$$

Če ima K karakteristiko 2 je $2xy = xy + xy = 0$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$x \longmapsto x^3$, če je $\mathrm{char}\, K = 3$

$$(x\cdot y)^3 = x^3\cdot y^3$$

$\mathrm{char}\, K = 3$

$$(x+y)^3 = x^3 + \cancel{3x^2y} + \cancel{3xy^2} + y^3$$

$x \longmapsto x^4$, če je $\mathrm{char}\, K = 4$

$$(x y)^4 = x^4\cdot y^4$$

$$(x+y)^4 = x^4 + \cancel{4x^3y} + \underbrace{6x^2y^2}_{\neq 0} + \cancel{4xy^3} + y^4$$

Trditev

Če je $\mathrm{char}\, K = p$ praštevilo, potem je $x \longmapsto x^p$ homomorfizem.

Dokaz

$$(x+y)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\cdot x^i y^{p-i} = x^p + y^p$$

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$$

$$\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{1\cdot 2\cdots i}$$ je večkratnik p

---

Osnovne lastnosti $f: K \to L$

[illegible]