

Ogrinjača in Lamijeve krivulje

Aljaž Pavlovič in Bor Bregant
Fakulteta za matematiko in fiziko

11. marec 2022

1 Lamijeve krivulje

Krivulje $\Gamma_r : x^r + y^r = 1$ pripadajo družini krivulj, ki jih je v 19. stoletju po Kristusu preučeval francoski matematik Gabriel Lamé. Po njem se imenuje družina krivulj *Lamijeve krivulje*, ki so v kartezičnem koordinatnem sistemu definirano kot:

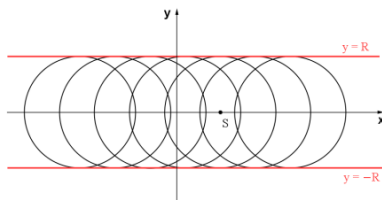
$$\mathfrak{L}(\alpha, a, b) = \{(x, y) \in [0, \infty)^2 \mid \frac{x^\alpha}{a^\alpha} + \frac{y^\alpha}{b^\alpha} = 1\}.$$

Definicija 1 *Ogrinjača ali ovojnica enoparametrične družine krivulj v ravnini je taka krivulja, ki je tangentna na vse člane družine v neki točki.*

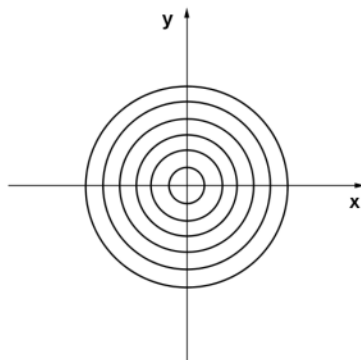
Lahko bi rekli, da enačba $F(x, y, t) = 0$ predstavlja celo družino krivulj, ki so odvisne od parametra t z nekega intervala. Ogrinjačo v parametrični obliki dobimo, ko rešimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= 0. \end{aligned}$$

Pripomba 1 *Ni nujno, da ima vsaka družina krivulj ogrinjačo. Primer take družine so koncentrične krožnice.*



Slika 1: Ogrinjača družine krožnic.



Slika 2: Primer družine krivulj, kjer ogrinjača ne obstaja.

Izrek 1 *Ovojnica družnice krivulj $\mathfrak{L}(\alpha, m, n)$, kjer parameter (m, n) določa krivuljo $\mathfrak{L}(\beta, a, b)$, je krivulja $\mathfrak{L}(\gamma, a, b)$, kjer je $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.*

Dokaz 1 *Parameter v našem primeru je par $\lambda = (m, n)$, ki določa pogoju $\frac{m^\beta}{a^\beta} + \frac{n^\beta}{b^\beta} = 1$. Ta pogoj nam omogoči, da pišemo družino v odvisnosti le od enega parametra:*

$$F(x, y, m) = \frac{x^\alpha}{m^\alpha} + \frac{y^\alpha}{b^\alpha \left(1 - \frac{m^\beta}{a^\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}} - 1 = 0.$$

Pogoj $\frac{\partial F}{\partial m}(x, y, \lambda) = 0$, nam da pogoj

$$-\frac{x^\alpha}{m^{\alpha+1}} + \frac{m^{\beta-1}}{a^\beta - m^\beta} \left(1 - \frac{x^\alpha}{m^\alpha}\right) = 0$$

iz katerega izrazimo $x^\alpha = \frac{m^{\alpha+\beta}}{a^\beta}$, oziroma

$$x = a \left(\frac{m^\beta}{a^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}.$$

Ko upoštevamo, da točka (x, y) leži na krivulji $\mathfrak{L}(\alpha, m, n)$, dobimo

$$y = b \left(1 - \frac{m^\beta}{a^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}.$$

Če je γ realno število, definirano kot $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, se zgoraj naračunanane vrednosti x in y izražajo kot:

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{m^\beta}{a^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{in} \quad \frac{y}{b} = \left(1 - \frac{m^\beta}{a^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Dobili smo željen rezultat

$$\frac{x^\gamma}{a^\gamma} + \frac{y^\gamma}{b^\gamma} = 1.$$

Literatura

- [1] Hassan Boualem and Robert Brouzet, *To Be (a Circle) or Not to Be?*, The College Mathematics Journal, strani 197-206, dostopno na <https://doi.org/10.4169/college.math.j.46.3.197>