

Izrek o dualnem doprinosu

x, y doprinosi za Π, Π'
potem sta x, y opt. rešitvi Π, Π'
natančno tedaj, ko velja

$$\forall i = 1, \dots, m: \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Rightarrow y_{n+i} = 0 \right)$$

$$\forall j = 1, \dots, n: \left(x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} = c_j \right)$$

Dokaz

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_{n+i}$$
$$\leq \sum_{i=1}^m b_i y_{n+i} = D$$

Po posledici 7 in K1) sta
 x, y opt. za Π, Π' natanko tedaj,
 ko $L = D$ kar je enakovredno

$$\forall j: c_j x_j = \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} \right) x_j \wedge$$

$$\forall i: \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_{ni} = b_i y_{ni}$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall j: \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} \right) x_j = 0 \quad \wedge$$

$$\forall i: \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_{ni} = 0$$

Primer Pokaži, da je $x = (0, 50, 0)$

Opt. rešitev problema kmetije.

II:

$$\max 10x_1 + 25x_2 + 12x_3$$

$$\text{p. p. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 250$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 300$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{II': } \min 50y_4 + 250y_5 + 300y_6$$

$$\text{p. p. } y_4 + 3y_5 + 3y_6 \geq 10$$

$$y_4 + 4y_5 + 5y_6 \geq 25$$

$$y_4 + 5y_5 + 4y_6 \geq 12$$

$$y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

1. korak: preverimo da je rešitev doпустna.

$$0 + 50 + 0 = 50$$

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 0 < 250 \Rightarrow y_5 = 0$$

$$3 \cdot 0 + 5 \cdot 50 + 4 \cdot 0 < 300 \Rightarrow y_6 = 0$$

$$0, 50, 0 \geq 0$$

2. korak: za vsako

neenakost, ki ni

dosežena z enakostjo,

pridajmo dualni

spr. do delimo 0.

3. korak: za vsako pozitivno vrednost v rešitvi postavimo enačbo v priležni neenakosti

$$y_4 + 4y_5 + 5y_6 = 25$$

4. korak: rešimo sistem iz 2. in 3. koraku in preverimo dopustnost rešitve.

$$y_4 = 15 \quad y_5 = 0 \quad y_6 = 0$$

$$15 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 10 \checkmark$$

$$15 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \geq 12 \checkmark$$

$$15, 0, 0 \geq 0 \checkmark$$

Torej je x opt. rešitev Π
(in y opt. rešitev Π').

- Če je rešitev več (parametrično rešitev) zadostuje, da poiščemo tako, vrednost parametrov, da bo rešitev dopustna.

Ekonomski pomen dajalnih spremenljivk

$$\begin{array}{llll} \max & 70x_1 + 25x_2 + 12x_3 & (\text{dohodek v } 40\text{€}) & x_1^* = 0 \\ \text{p. p.} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 & (\text{zemlja v ha}) & x_1^* = 50 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 250 & (\text{delo v 20 \u010dl-h}) & x_2^* = 50 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 300 & (\text{kapital v } 20\text{€}) & x_3^* = 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 + 50 + 0 = 50 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 0 < 250 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot 50 + 4 \cdot 0 < 300 \\ 0, 50, 0 \geq 0 \end{array}$$

Ne izpla\u010da se naj ti
ve\u010f delavne sile
ali vzeti kredita.
Morda se nam po izpla\u010du
kapiti ve\u010f zemlje.

$$\begin{array}{l} y_4^* = 15 \\ y_5^* = 0 \\ y_6^* = 0 \end{array}$$

Izrek LP Π z neizmenjeno desnno
 opt. rešitvijo (vsi konstantni
 členi pri baznih spremenljivkah
 so pozitivni). Potem obstaja $\varepsilon > 0$,
 da velja

$$|\Delta b| < \varepsilon \Rightarrow \Delta z^* = \sum_{i=1}^m y_{n+i}^* \Delta b_i,$$

kjer je y^* opt. rešitev Π'
 in sta Δb in Δz^* spremenitvi
 desne strani in opt. vrednosti.

V našem primeru: $\Delta z^* = 15 \Delta b_1$ za $|\Delta b| < \varepsilon$.
 Zemljo se nam splača dokupiti

po ceni največ $15 \cdot 40 \text{ €/ha} = 600 \text{ €/ha}$.

Torej: opt. vrednosti duala dajo "fršno"/"pôčeno"
 /sprejemljivo ceno.

Dual splasnega LP

Izrek Za LP $\bar{\Pi}$ je njegov dual Π' :

$$\Pi: \max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\Pi': \min \sum_{i=1}^m b_i y_{ni}$$

$$\text{p.p.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m')$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (m' + 1 \leq i \leq m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (1 \leq j \leq n')$$

$$\text{p.p.} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} \geq c_j \quad (1 \leq j \leq n')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} = c_j \quad (n' + 1 \leq j \leq n)$$

$$y_{ni} \geq 0 \quad (1 \leq i \leq m')$$

Izrek o dualnem dopolnjevanju

za Π, Π' :

x, y dopustni rešitvi Π, Π' . Potem sta x, y opt. rešitvi Π, Π' natanko tedaj, ko velja

$$\forall i = 1, \dots, m': \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \vee \quad y_{ni} = 0 \right)$$

$$\forall j = 1, \dots, n': \left(x_j = 0 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} = c_j \right)$$

	Π		Π'
Torej:	$\leq$	$\Leftrightarrow$	$y_{ni} \geq 0$
	$=$	$\Leftrightarrow$	y_{ni} neomejena

Primer

$$\begin{array}{ll}
 \Pi: & \max \quad 3x_1 - 2x_2 \\
 \text{p.p.} & x_1 + 4x_2 \leq 5 \\
 & 3x_1 + x_2 = 4 \\
 & x_1 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \Pi': & \min \quad 5y_3 + 4y_4 \\
 \text{p.p.} & y_3 + 3y_4 \geq 3 \\
 & 4y_3 + y_4 = -2 \\
 & y_3 \geq 0
 \end{array}$$

Dokaz Pretvorimo Π v std. obliku

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n'} c_j x_j + \sum_{j=n'+1}^n c_j x_j^+ - \sum_{j=n'+1}^n c_j x_j^-$$

$$\text{p. p.} \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j + \sum_{j=n'+1}^n a_{ij} x_j^+ - \sum_{j=n'+1}^n a_{ij} x_j^- \leq b_i \quad (1 \leq i \leq m')$$

$$\sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j + \sum_{j=n'+1}^n a_{ij} x_j^+ - \sum_{j=n'+1}^n a_{ij} x_j^- \leq b_i \quad (n'+1 \leq i \leq m)$$

$$- \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j - \sum_{j=n'+1}^n a_{ij} x_j^+ + \sum_{j=n'+1}^n a_{ij} x_j^- \leq -b_i \quad (n'+1 \leq i \leq m)$$

x_j

x_j^+

x_j^-

$\geq 0 \quad (1 \leq j \leq n')$

$\geq 0 \quad (n'+1 \leq j \leq n)$

Задача 5.10

$$\min \sum_{i=1}^{m'} b_i y_{ni} + \sum_{i=m'+1}^m b_i y_{ni}^+ - \sum_{i=m'+1}^m b_i y_{ni}^-$$

$$\text{p.p.} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} + \sum_{i=m'+1}^m a_{ij} y_{ni}^+ - \sum_{i=m'+1}^m a_{ij} y_{ni}^- \geq c_j \quad (1 \leq j \leq n')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} + \sum_{i=m'+1}^m a_{ij} y_{ni}^+ - \sum_{i=m'+1}^m a_{ij} y_{ni}^- \geq c_j \quad (n'+1 \leq j \leq n)$$

$$- \sum_{i=1}^m a_{ij} y_{ni} - \sum_{i=m'+1}^m a_{ij} y_{ni}^+ + \sum_{i=m'+1}^m a_{ij} y_{ni}^- \geq -c_j \quad (n'+1 \leq j \leq n)$$

y_{ni}

y_{ni}^+

$$\begin{aligned} &\geq 0 \quad (1 \leq i \leq m') \\ &y_{ni}^- \geq 0 \quad (m'+1 \leq i \leq m) \end{aligned}$$

PROBLEM RAZVOZA

(angl. transshipment problem)

Primer Imamo 3 mesta. V mestu a proizvajajo 7 enot mleka, ga porabijo 4 enote, v mestu b ga porabijo 4 enote, v mestu c pa ga porabijo 3 enote.

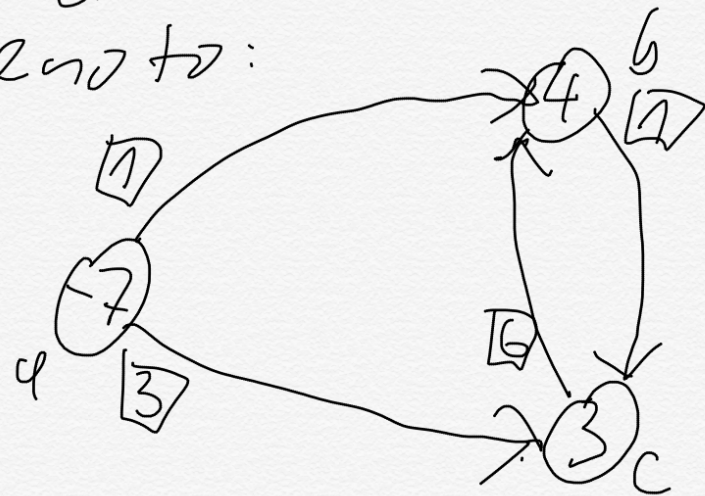
Prevoz po cesti ima določeno ceno enoto:

$a \rightarrow b: 1$

$a \rightarrow c: 3$

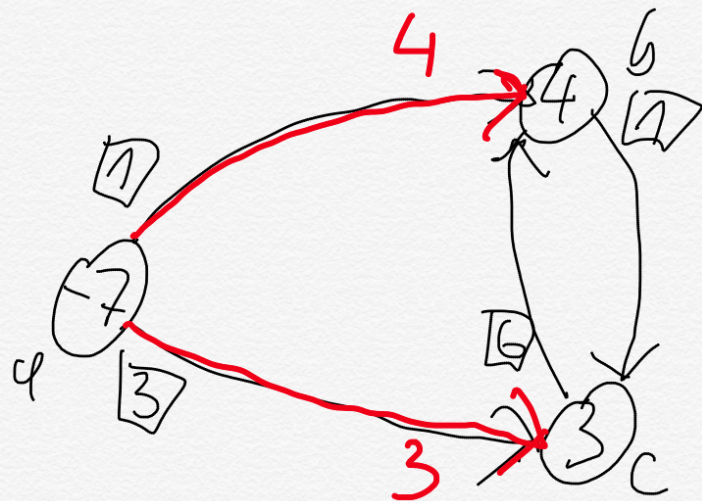
$b \rightarrow c: 1$

$c \rightarrow b: 6$

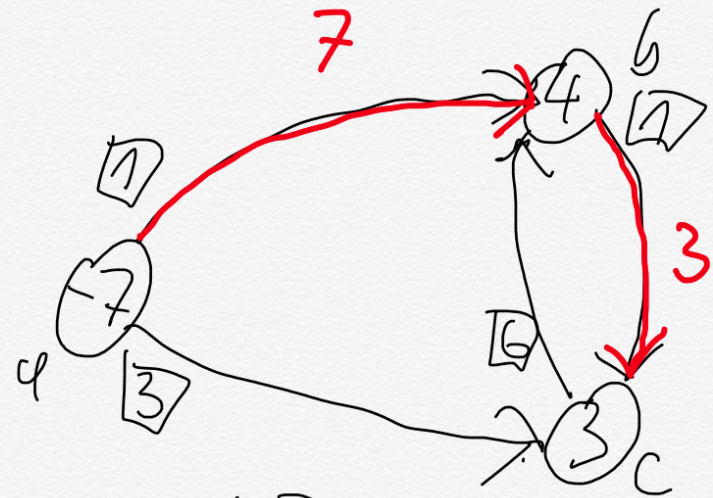


Kako najceneje premesti mleko od proizvajalca do porabnikov?

Можно решить:



Цена: $1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 13$



Цена: $1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 10$

Imamo usmerjen utežen graf
 $G = (V, E)$, ter uteži na vozliščih
 $b_v \in \mathbb{R} \ (v \in V)$
 množico množico
 vozlišč usmerjenih
 povezav in uteži na povezavah
 $c_{uv} \in \mathbb{R} \ (uv \in E)$, kjer:

• $b_v \geq 0$: če je v vozlišče v
 poraba b_v

• $b_v < 0$: če je v vozlišče v
 proizvodnja $-b_v$.

Predpostavimo $\sum_{v \in V} b_v = 0$.

Iščemo $x_{uv} \geq 0$ za vsako povezavo $uv \in E$,
 tako da velja Kirchhoffov zakon:

$$\forall v \in V \quad \sum_{uv \in E} x_{uv} - \sum_{vu \in E} x_{vu} = b_v$$

Radi bi minimizirali ceno $\sum_{uv \in E} c_{uv} x_{uv}$.