

1 Določeni integral

NALOGA 1.1. Naj bo $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna soda funkcija. Pokaži, da je

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

REŠITEV. Imamo

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

kjer v prvi del uvedemo novo spremenljivko $x = -t$ in nadaljujemo z

$$\int_a^0 f(-t) (-dt) + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = (f(-t) = f(t)) = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

NALOGA 1.2. Naj bo $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna liha funkcija. Pokaži, da je

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

REŠITEV. Imamo

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

kjer v prvi del uvedemo novo spremenljivko $x = -t$ in nadaljujemo z

$$\begin{aligned} \int_a^0 f(-t) (-dt) + \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = (f(-t) = -f(t)) = \\ &= - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

NALOGA 1.3. Izračunaj določeni integral

$$\int_0^{2\pi} \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| dx.$$

REŠITEV. Velja

$$\left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2} & ; \quad x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \\ \frac{1}{2} - \sin x & ; \quad x \in [0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, 2\pi] \end{cases}$$

Imamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x - \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{2\pi} \frac{1}{2} - \sin x dx = \\ &= \frac{6\sqrt{3} + \pi}{3}. \end{aligned}$$

NALOGA 1.4. Izračunaj določeni integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx.$$

REŠITEV. Vpeljemo novo spremenljivko

$$t = x^3 \quad dt = 3x^2 dx$$

in dobimo

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{3} \ln(t + \sqrt{t^2+4}) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

NALOGA 1.5. Izračunaj določeni integral

$$\int_0^2 \frac{(x^3 - 4x + 2) \cos(x^4 - 8x^2 + 8x + 3)}{x^4 - 8x^2 + 8x + 3} dx.$$

REŠITEV. Vpeljemo novo spremenljivko

$$t = x^4 - 8x^2 + 8x + 3 \quad \frac{1}{4} dt = (x^3 - 4x + 2) dx$$

in dobimo

$$\int_0^2 \frac{(x^3 - 4x + 2) \cos(x^4 - 8x^2 + 8x + 3)}{x^4 - 8x^2 + 8x + 3} dx = \int_3^3 \frac{\cos t}{4t} dt = 0.$$

NALOGA 1.6. Izračunaj določeni integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

REŠITEV. Spomnimo se formule za uvedbo nove spremenljivke ($t = \varphi(x)$)

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

oz. ($x = \varphi(t)$)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt.$$

Če bi hoteli v $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ vpeljati zamenjavo $t = x^2$, ne moremo direktno uporabiti prve formule, saj $\sqrt{1-x^2}$ ni oblike $f(x^2)2x$ (opazimo, da v tem primeru tudi dobimo obe meji enaki 0, kar seveda da napačen rezultat).

Dejansko, če bi bila takšna nekontrolirana menjava spremenljivk (v prvi formuli) dovoljena, bi to takoj pomenilo, da so vsi določeni integrali ničelni, kar bi sledilo iz uvedbe nove spremenljivke $t = (x-a)(x-b)$ v integral $\int_a^b f(x) dx$.

Raje uporabimo drugo formulo, kjer npr. uvedemo

$$x = \sin t \quad dx = \cos t dt$$

in dobimo

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_a^b |\cos t| \cos t dt.$$

Tu sta a, b takšni števili, da je $\sin a = -1$ in $\sin b = 1$, torej lahko vzamemo za $a = -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ in za $b = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots$ Najenostavnejši primer dobimo, če vzamemo $a = -\frac{\pi}{2}$ in $b = \frac{\pi}{2}$. Dobimo

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Opomba 1.7. Zamenjava spremenljivke $x = \frac{1}{2} \sin t$ pa zopet ne bi bila v redu, saj potem ne bi mogli določiti mej integrala, saj ni nobenega t , za katerega bi bilo $\frac{1}{2} \sin t = \pm 1$.

NALOGA 1.8. Za $n = 1, 2, 3, \dots$ naj bo dan integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

1. Izračunaj I_1 .
2. Pokaži, da velja

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

3. Izračunaj I_3 .

REŠITEV. 1.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Imamo

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = I_n - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

Na drugem delu izvedemo per-partes

$$u = x \quad dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^{n+1}} \implies du = dx \quad v = -\frac{1}{2n} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

in dobimo

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2n} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n.$$

3. Ker je $I_1 = \frac{\pi}{4}$ iz zveze

$$I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

dobimo, da je

$$I_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2^2} = \frac{\pi+2}{8}$$

in

$$I_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi+2}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3\pi+8}{32}.$$

NALOGA 1.9. Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k \sqrt{n^2 - k^2}.$$

REŠITEV. Spomnimo se, da lahko določeni integral izračunamo s pomočjo Riemannovih vsot, konkretno velja

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

Imamo (samo malo preoblikujemo)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k \sqrt{n^2 - k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \frac{1}{n} = \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{3}.$$