

Splošna krivulja Γ_r

Aljaž Pavlovič in Bor Bregant
Fakulteta za matematiko in fiziko

11. marec 2022

1 Družina krivulj $\Gamma_r : x^r + y^r = 1$

Na ponedeljkovih predavanjih bomo pokazali, da je za $r = \frac{1}{2}$ krivulja del parabole. Očitno je za $r = 2$ krivulja krožnica, za $r = 1$ pa premica. Porodi se vprašanje, če krivulja predstavlja stožnico še za kakšen r .

Izrek 1 *Krivulja $\Gamma_r : x^r + y^r = 1$ za $r \in (0, \infty)$, $(x, y) \in [0, 1]^2$ predstavlja del stožnice natanko tedaj, ko je $r \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$*

Dokaz 1 *Po definiciji je enačba stožnice $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, kjer je vsaj en od a, b, c, d, e različen od 0. Če bi bila krivulja enačba stožnice, bi obstajali zgornji parametri, da za $\forall x \in [0, 1]$ velja;*

$$ax^2 + 2bx(1 - x^r)^{\frac{1}{r}} + c(1 - x^r)^{\frac{2}{r}} + dx + e(1 - x^r)^{\frac{1}{r}} + f = 0.$$

Sedaj glejmo koeficiente pri posameznih potencah x^i za $i \in \{1, \dots, 3r + 1\}$ v razvoju binomske vrste. Pri tem obravnavajmo dva primera:

- $r > 1 \wedge r \neq 2$:
Pri členu x^2 imamo le a , torej $a = 0$. Edini koeficient pri x^{r+1} je $-\frac{2b}{r}$, torej $b = 0$. Pri členu x ostane le še d , torej $d = 0$. Ko vstavimo $x = 1$ dobimo $f = 0$, kar nam poenostavi izraz v $c(1 - x^r)^{\frac{1}{r}} + e = 0$. S ponovno vstavitvijo $x = 1$ dobimo še $e = 0$ in posledično $c = 0$. Dobili smo $a = b = c = d = e = 0$, kar pa ne predstavlja nobene (neizrojene) stožnice.
- $0 < r < 1 \wedge r \neq \frac{1}{2}$:
Po enakem razvoju binomske vrste dobimo možne potence $x : 2, kr + 1, lr, 1$ in 0, za $k, l \in \mathbb{N}$. Dela x^r in x^{2r} se pojavita le pri faktorjema c in e (tu smo predpostavili $r \neq \frac{1}{2}$), torej $-\frac{2}{r}c - \frac{1}{r}e = 0$ in $\frac{2}{r}(\frac{2}{r} - 1)c + \frac{2}{r}(\frac{1}{r} -$

1) $r = 0$. Sledi $c = e = 0$. Nato opazimo $f = 0$. Člen x^{r+1} nastopa le enkrat, torej $b = 0$. Zaključimo $a = d = 0$ in s tem smo zopet prišli v protislovje.

1.1 Dodatek k dokazu: Binomska vrsta

V dokazu smo uporabili razvoj binomske vrste, kar je taylorjev razvoj funkcije $f(x) = (1+x)^\alpha$, kjer je α poljubno kompleksno število in $|x| < 1$. Eksplicitno je to $f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$.

Literatura

- [1] Hassan Boualem and Robert Brouzet, *To Be (a Circle) or Not to Be?*, The College Mathematics Journal, strani 197-206, dostopno na <https://doi.org/10.4169/college.math.j.46.3.197>