

Uganke o moči množic

Margerita Mehle in Nina Štrovs
Fakulteta za matematiko in fiziko

21. marec 2022

V tem dokumentu bomo spoznali sebične množice, uganke o moči množic in njihovo zanimivo povezavo z znanimi nalogami o vitezh in opredah.

1 Sebične množice

Množici pravimo, da je *sebična*, če je njena moč oz. kardinalnost eden izmed elementov te množice. Takšna množica je $\{3, 17, 28\}$, saj je njena moč enaka tri in število tri je element te množice. Poznamo tudi *minimalno* sebično množico. To je množica, ki je sebična in nobena njena prava podmnožica ni sebična. Takšna množica je $\{2, 4\}$, saj je sebična, ker vsebuje število dve in vsaka prava podmnožica ima le en element, število ena pa ni v tej množici.

Nas bodo zanimale množice kot so $A = \{1, 5, a\}$, kjer je $a = |A|$. To bomo poimenovali *uganka o moči množice* oz. krajše samo *uganka*. Gre za množico, ki vsebuje svojo moč, a ta moč ni eksplicitno napisana.

Naloga 1. Kakšna je moč množice $A = \{1, 3, a\}$?

Naloga 2. Kakšna je moč množice $A = \{4, a, 2a\}$?

Ni nujno, da ima vsaka uganka tudi svojo rešitev. Če obstaja rešitev, to pomeni, da obstaja množica števil S , ki ustreza našim zahtevam. Rešitev uganke A je lahko *enolična*, če obstaja natanko ena ustrezna množica. Uganka $A = \{1, 5, a\}$ ima enolično rešitev $S = \{1, 3, 5\}$.

Izrek 1.1. *Množica $S \subseteq \mathbb{N}$ je enolična rešitev uganke natanko tedaj, ko je S sebična.*

Dokaza izreka tu ne bomo podali. Osnovna ideja v eno smer je sicer metoda, s katero bi konstruirali uganko iz katerekoli sebične množice. Dokaz si lahko samostojno ogledate v [1].

Naloga 3. Kakšna je moč množice $A = \{1, 3, 6, a, 18 - 3a\}$?

2 Vitezi in oprode

Ugankam lahko dvignemo težavnost tako, da povečamo število množic v uganki. Množice pa morajo biti med seboj povezane z informacijami o kardinalnosti. Vsaka množica mora torej vsebovati element, ki je povezan s kardinalnostjo druge množice v uganki. Takim množicam pravimo *simbiotične*. Primer dveh simbiotičnih množic sta $A = \{1, 3, 5, 7\}$ in $B = \{4\}$, saj $|A| = 4 \in B$ in $|B| = 1 \in A$.

Spomnimo se, kakšne so naloge o vitezi in oprodah. Na nekem otoku živita dve vrsti prebivalstva, vitezi in oprode. Vitezi govorijo le resnico, oprode pa vedno lažejo. Nekaj domačinov otoka nam poda izjave, na podlagi katerih moramo ugotoviti kdo je vitez in kdo oproda. Takšne naloge lahko povežemo z ugankami o moči množic:

- Vsak domačin, ki poda izjavo, bo predstavljal eno množico.
- Kardinalnost množice, ki je podana med elementi nam pove, o kom govori izjava.
Če torej prebivalec A v svoji izjavi pove nekaj o sebi in o prebivalcu B, bo množica A vsebovala kardinalnosti a in b.
- Če prebivalec laže, torej je oproda, bo podana kardinalnost v njegovi množici enaka enemu izmed že podanih elementov.
- Če prebivalec govori resnico, torej je vitez, bo podana kardinalnost v njegovi množici različna od ostalih že podanih elementov.

Poiščimo ustrezno nalogo o vitezi in oprodah za uganko, kjer sta podani množici $A = \{2, 3, 6, a, b+3\}$ in $B = \{a, 5\}$. Najprej razrešimo uganko o moči množic. Kandidati za moč množice so: $a \in \{3, 4, 5\}$ in $b \in \{1, 2\}$. Ločimo možnosti:

1. Če je $b = 2$, potem $a \neq 5$. Oglejmo si kaj to pomeni za množico A. Sledi, da je $A = \{2, 3, 6, a, 5\}$ in ker $a \neq 5$, ostaneta le možnosti, da je $a = 3$ ali $a = 4$. Prva opcija $a = 3$ odpade, saj so že sedaj v množici A štirje podani elementi. Tudi opcija $a = 4$ odpade, saj bi skupaj s to štirico množica A vsebovala pet elementov in ne štiri.
2. Če je $b = 1$, potem je $a = 5$. Sledi, da je $A = \{2, 3, 6, 5, 4\}$ in to je rešitev naše uganke.

S pomočjo rešitve sedaj konstruirajmo nalogo o vitezi in oprodah. Podani imamo dve množici, kar pomeni, da imamo dva prebivalca. Označili

ju bomo skladno z množicama, torej prebivalec A in prebivalec B . Rešitev uganke nam pove, da mora biti prebivalec B oproda, prebivalec A pa vitez. Iz prve možnosti poteka reševanja uganke sledi sklep, da če je B vitez, potem je A oproda, saj $a \neq 5$. Iz druge možnosti poteka reševanja uganke pa, da natanko takrat ko je B oproda, je A vitez.

Ker množica A vsebuje informaciji o moči obeh množic, bo prebivalec A govoril tako o sebi kot o prebivalcu B , zato lahko sklep iz prve možnosti povežemo s prebivalcem A . Ker je A vitez, bo govoril resnico in napisan sklep je izjava, ki je seveda resnična, torej se bo izjava prebivalca A glasila: Če je B vitez, potem sem jaz oproda. Sklep iz druge množnosti pa bomo pripisali prebivalcu B , saj množica B vsebuje le kardinalnost a in bo izjava prebivalca B govorila le o prebivalcu A . Vemo, da je prebivalec B oproda, torej moramo iz pripisanega sklepa tvoriti laž in izjava prebivalca B bo: A je oproda.

Naloga 4. Določi moči množice $A = \{3, b\}$ in $B = \{1, a, b\}$. Poišči še nalogo o vitezih in oprodah, ki ustreza tej uganki.

Literatura

- [1] O. Levin in T. Markkanen, *Puzzles of Cardinality*, The College Mathematics Journal **52:4** (2021), 243-253.