

Delitelji nič v končnih kolobarjih

Dejan Govc

19. marec 2022

Naj bo K kolobar, ki ima *končno mnogo elementov*. Ne zahtevamo, da je K komutativen, prav tako ne zahtevamo, da obstaja enica (nevtralni element za množenje). Pokazali bomo, da velja naslednje:

Trditev. Vsak neničeln element $a \in K$ je obrnljiv ali delitelj nič.

Dokaz. Naj bo $a \neq 0$ poljuben element v K . Ker je K končen, obstajata naravni števili $m, n \in \mathbb{N}$, da velja

$$a^m = a^n.$$

Fiksirajmo m in n tako, da je m najmanjše naravno število, za katerega velja enakost zgornje oblike (0 ne štejeemo za naravno število); pri tej izbiri m pa nato izberimo še najmanjši možni $n > m$. Zdaj se lahko zgodi dvoje:

1. Če je $m > 1$, iz minimalnosti m in n sledi, da je

$$a^{m-1} \neq a^{n-1},$$

od koder dobimo produkt neničelnih elementov

$$a(a^{m-1} - a^{n-1}) = 0$$

in je torej a delitelj nič¹.

2. Če je $m = 1$, velja

$$a = a^n.$$

Zdaj imamo spet dve možnosti:

- (a) Če obstaja $b \in K$, da velja

$$b \neq a^{n-1}b \quad \text{ali} \quad b \neq ba^{n-1},$$

potem velja

$$a(b - a^{n-1}b) = 0 \quad \text{oziroma} \quad (b - ba^{n-1})a = 0$$

in je torej a delitelj nič.

- (b) Če tak b ne obstaja, pa to pomeni, da za vse $b \in K$ velja

$$a^{n-1}b = b = ba^{n-1}$$

in je torej a^{n-1} enica v K . Od tod pa takoj sledi, da je a obrnljiv.

□

¹Če ima K enico, podoben sklep deluje tudi v primeru $m = 1$; v splošnem pa izraz a^0 nima pomena in je zato treba primer $m = 1$ obravnavati posebej.