

Kombinatorika 2: 2. izpit

17. 3. 2022

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Sedež (MFP)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

1. naloga (25 točk)

Določi število takih moničnih polinomov stopnje n nad poljem $\mathbb{F}_q$, ki nimajo ničel nad $\mathbb{F}_q$. (Polinom je moničen, če ima vodilni koeficient enak 1.)

Teoretično ozadje: Kolobar polinomov $F[x]$ nad poljem F je domena z enolično faktorizacijo. V posebnem, polinom $f \in F[x]$ stopnje n ima r različnih ničel $x_1, \dots, x_r$ v F natanko tedaj ko je oblike

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_r)g(x)$$

za neki $g \in F[x]$ stopnje $n - r$.

⑤. $A_i = \{ p \in \mathbb{F}_2[x] \mid i \in \mathbb{F}_2 \text{ is a root of } p \}$

③ $\left| \bigcap_{i=1}^2 A_i^c \right| = ?$

⑭

- $|A_i| = 2^{n-1}$
 $p \in A_i \iff p(x) = (x - i)g(x)$; g monic of degree $n-1$
 $g(x) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$
 We have 2 choices for any of the a_j .
- Similarly
 $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = 2^{n-|I|}$
 $p(x) \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff p(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_r) \cdot g(x)$
 $I = \{x_1, \dots, x_r\}$
 g monic of degree $n-|I|$

③ • Plug this into the PIE formula for $\left| \bigcap_{i=1}^2 A_i^c \right|$

2. naloga (25 točk)

Naj bo a_n število označenih dreves s korenom, katerih vsa vozlišča imajo sodo število otrok (in imajo s korenom skupaj n vozlišč).

a) (20) Z uporabo rodovnih funkcij določi zaporedje $(a_n)_n$.

b) (5) Naj bo G eksponentna rodovna funkcija za število označenih dreves s korenom, katerih vsa vozlišča imajo liho stopnjo. Izrazi G z eksponentno rodovno funkcijo zaporedja $(a_n)_n$.

a) • $F(x) \xleftrightarrow{\text{egf}} (a_n)_n$

(10) • $F(x) = x \left(\frac{F(x)^2}{2!} + \frac{F(x)^4}{4!} + \dots \right) = x \cdot \frac{e^{F(x)} + e^{-F(x)}}{2}$

$\uparrow$ root $\uparrow$ two subtrees with same structure or $\uparrow$ 4 subtrees with same... structure i.e. an even # of subtrees with same structure

(10) • Use Lagrange's theorem

$$F(x) = x \cdot G(F(x)) \quad ; \quad G(x) = \text{ch}(x)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow n[x^n] F(x) &= [x^{n-1}] G(x)^n = [x^{n-1}] \frac{1}{2^n} (e^x + e^{-x})^n \\
 &= [x^{n-1}] \frac{1}{2^n e^{nx}} (e^{2x} + 1)^n \\
 &= [x^{n-1}] \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} e^{(2k-n)x} \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(2k-n)^{n-1}}{(n-1)!}
 \end{aligned}$$

F was egf $\Rightarrow \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(2k-n)^{n-1}}{(n-1)!}$

and finally $a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2k-n)^{n-1}$

b) $G(x) = x \cdot \text{sh}(F(x)) = x \cdot \frac{e^{F(x)} - e^{-F(x)}}{2}$

3. naloga (25 točk)

distinct

Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitivna ~~naravna~~ ^{distinct} števila ~~(ne nujno različna)~~ z največjim skupnim deliteljem 1. Označimo z b_n število rešitev enačbe

$$n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k,$$

kjer so x_i nenegativna cela števila.

a) (12) Določi običajno rodovno funkcijo zaporedja $(b_n)_n$.

b) (13) Določi asimptotično obnašanje zaporedja $(b_n)_n$. Natančneje, dokaži, da velja $b_n \sim cn^{k-1}$ za neko konstanto c in eksplicitno izrazi c v odvisnosti od števil $a_1, \dots, a_k$.

a) $\mathbb{F}(x) \xleftrightarrow{\text{ogf}} (b_n)_n \iff \text{partitions with specified parts (of length } \in \{a_1, \dots, a_k\})$

$$\mathbb{F}(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x^{a_i}} \quad \left(\text{You did sth similar at lectures e.g. for partitions with parts of length } \leq 2 \right)$$

[Note: for $\{a_1, \dots, a_k\} = \{1, \dots, n\}$ we get $b_n = p(n)$
 $\parallel$ # of partitions of n]

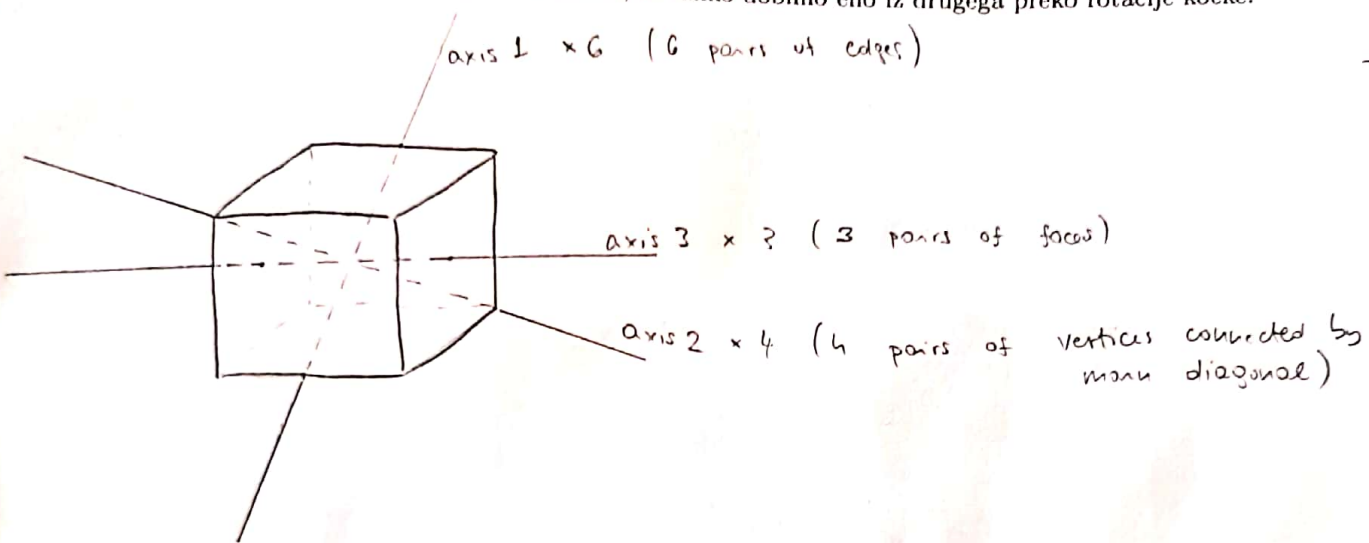
b) The singularity that counts is the pole of order k at $x = 1$.

$$c_{-k} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^k}{(1-x^{a_1}) \dots (1-x^{a_k})} = \frac{(-1)^k}{a_1 \cdot a_2 \dots a_k}$$

$$\Rightarrow b_n \sim \frac{(-1)^k n^{k-1} c_{-k}}{(k-1)!} = \frac{n^{k-1}}{a_1 \dots a_k (k-1)!}$$

4. naloga (25 točk)

Določi število takih barvanj robov kocke s 3 barvami, kjer se vse barve pojavijo sodo mnogokrat. Dve barvanji štejeemo za enaki, če lahko dobimo eno iz drugega preko rotacije kocke.



Symmetries:

- 1 • identity: 12 cycles of length 1
- 2×3 • rotation $\pm 90^\circ$, axis 3: 3 cycles of size 4
- 3 • rot. 180° , axis 3: 6 cycles of size 2
- 6 • rot 120° , axis 1: 2 cycles of size 1, 5 cycles of size 2
- 2×4 • rot $\pm 120^\circ$, axis 2: 4 cycles of size 3

$$\Rightarrow Z_G(t_1, t_2) = \frac{1}{24} \left[t_1^{12} + 6 t_1^3 t_2^3 + 3 t_2^6 + 6 t_1^2 t_2^5 + 8 t_1^4 \right]$$

$$(*) Z_G(y_1 + y_2 + y_3, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) = \dots =: F(y_1, y_2, y_3)$$

Plug in $y_i = 1$ if we have an even # of both colour 1 & 2, colour 3 also appears an even # of times.

We need from (*) the coefficients at even powers of y_1, y_2 . [BTW: If you arrived at this point, you would already get 25 pts]

An easy way to do this is to compute:

$$\frac{1}{4} \left[F(1, 1, -1) + F(1, -1, 1) + F(1, 1, 1) + F(1, -1, -1) \right]$$