• v $\mathbb{Z}[x]$ ideal generiran z 2 in x $(2, x)$

(tj. polinomi oblike $a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_1$ sodi)

$(2, x)$ ni glavni ideal

podobno:

v $\mathbb{R}[x, y] = (\overset{\text{obseg}}{\mathbb{R}}[x])[y]$ — glavno idealski, ni obseg; ↳ ni glavno idealski

$(x, y) = \{x\,p(x,y) + y\,q(x,y) \mid p, q \in \mathbb{R}[x,y]\}$ ni glavni.

$\mathbb{Z}_3$

$\underline{0} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ $\quad (3) = 3\mathbb{Z}$ $\quad 3\mathbb{Z} + 0$

$\underline{1} = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$ $\quad 3\mathbb{Z} + 1$

$\underline{2} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$ $\quad 3\mathbb{Z} + 2$

$(2 + (3)) + (5 + (3)) = 7 + (3)$

$(2 + (3)) + (-7 + (3)) = -14 + (3)$

$I \trianglelefteq K$ dvostranski ideal

K razdelimo na ekvivalenčne razrede glede na I

za $a, b \in K$: $\quad a \sim b \iff a - b \in I$

$\sim$ je ekvivalenčna relacija

$a \sim a \qquad a - a = 0 \in I$ refleksivnost ✓

$a \sim b \Rightarrow b \sim a \qquad a - b \in I \Rightarrow b - a \in I \Rightarrow b \sim a$ simetričnost ✓

$a \sim b,\ b \sim c \qquad a - b \in I,\ b - c \in I \leadsto \underbrace{(a-b) + (b-c)}_{a-c} \in I \Rightarrow a \sim c$ tranzitivnost ✓

$\sim$ razdeli K na ekvivalenčne razrede

množico ekvivalenčnih razredov $K/\sim$ običajno označimo K/I $\quad \left(\begin{matrix} (3) \trianglelefteq \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/(3) \end{matrix} \right.$

Na K/I lahko naravno definiramo + in ·.

$x \in K \leadsto$ ekvivalenčni razred $[x]$, $\underbrace{(x + I)}$ $\qquad (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} \overset{?}{=} \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

$(x + I) + (y + I) \overset{\text{Def}}{:=} (x + y + I)$

$x \sim x',\ y \sim y' \Rightarrow x' + y' \sim x + y \qquad (x' + y') - (x + y) = \underset{I}{(x' - x)} + \underset{I}{(y' - y)} \in I$

$(x' + I) + (y' + I) = (x' + y') + I$

$(x+I)\cdot(y+I) \overset{\text{Def}}{:=} (x\cdot y + I)$

$x \sim x' \quad (x-x') \in I \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad xy \sim x'y' \quad (xy - x'y') \in I$
$y \sim y' \quad (y-y') \in I$

$$xy - x'y' = xy - xy' + xy' - x'y'$$
$$= \underbrace{x(y-y')}_{\in I} + \underbrace{(x-x')y'}_{\in I}$$

$(K/I, +, \cdot)$ je kolobar, ki je
asociativen / komutativen / unitalen
$1+I$ kakor hitro je tudi K tak

Primeri

- $K/_{(0)} = K$, $\quad K/K = \{0\}$

$x \sim y \quad x-y \in (0)$ $\quad x \sim y \quad x-y \in K$, vsi so ekvivalentni
$x = y$

- $\mathbb{Z}$, ideali so (n)
$\mathbb{Z}/_{(n)} = \mathbb{Z}_n$

- $\mathbb{R}[x]/_{(x)}$ $\quad (x) = \{x \cdot \text{nekaj}\}$ = polinomi brez konstantnega člena
$(a+(x)) + (b+(x)) = (a+b) + (x)$ $\quad \mathbb{R}[x]/_{(x)} \cong \mathbb{R}$
ekv. razredi $\leftrightarrow \mathbb{R}$
$(\quad)\cdot(\quad) = a\cdot b + (x)$

- $\mathbb{R}[x]/_{(x^2)}$ $\quad (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \sim (b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots) \Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1$

$a + bx + (x^2) \leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\quad (a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$
$(a,b)\cdot(c,d)$

$$\Big(\underset{\updownarrow\ (a,b)}{(a+bx)} + (x^2)\Big) \cdot \Big(\underset{\updownarrow\ (c,d)}{(c+dx)} + (x^2)\Big) = ac + \underset{\updownarrow\ (ac,\ ad+bc)}{adx + bcx} + bdx^2 + (x^2)$$

- $\mathbb{R}[x]/_{(x^2+1)}$ predstavniki so polinomi stopnje ≤ 1

$\mathbb{C} \cong$ $\quad (a+bx+(x^2+1)) + (c+dx+(x^2+1)) = ac + bdx + (x^2+1)$ $\quad (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

$(a+bx+(x^2+1))\cdot(c+dx+(x^2+1)) = ac + adx + bcx + bdx^2 + (x^2+1)$ $\quad \underbrace{bdx^2 + bd}\ - bd$

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ $\quad (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Izrek (o izomorfizmu)

$f : K \to L$ homomorfizem kolobarjev

Potem je $\operatorname{Ker} f \triangleleft K$ in imamo naravni izomorfizem

$$\bar{f} : K/_{\operatorname{Ker} f} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} f \quad , \quad \bar{f}(x + \operatorname{Ker} f) := f(x)$$

Dokaz

$\bar{f}$ je dobro definirana.

$x \sim x'$ $\quad \bar{f}(x + \operatorname{Ker} f) = \bar{f}(x' + \operatorname{Ker} f)$

$x - x' \in \operatorname{Ker} f$

$f(x) - f(x') = f(\underbrace{x - x'}_{\in \operatorname{Ker} f}) = 0$

$\bar{f}$ je homomorfizem

$$\bar{f}\big((x + \operatorname{Ker} f) \cdot (y + \operatorname{Ker} f)\big) = f(xy) = f(x) \cdot f(y) = \bar{f}(x + \operatorname{Ker} f) \cdot \bar{f}(y + \operatorname{Ker} f)$$

$\bar{f}$ je bijekcija

surjektiven $\quad \operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f$ ✓

injektiven $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \bar{f} = \{0\}$ $\quad \operatorname{Ker} \bar{f} = \{ x + \operatorname{Ker} f \mid \bar{f}(x + \operatorname{Ker} f) = f(x) = 0 \}$

$\hookrightarrow$ v K/I

$= [\operatorname{Ker} f]$

$= 0 + \operatorname{Ker} f$

$\boxed{/\!/}$

Primer

- $f_i : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$

  $p(x) \longmapsto p(i)$

  Ker f_i = $\quad p(i) = 0 \Rightarrow p(-i) = 0 \quad p(x)$ je deljiv z $(x+i)(x-i) = x^2 + 1$

  $\operatorname{Ker} f_i = (x^2 + 1)$

  Im f_i = $\quad a + bx \xmapsto{x = i} a + bi \quad \operatorname{Im} f_i = \mathbb{C}$

  $$\boxed{\mathbb{R}[x]/_{(x^2+1)} \cong \mathbb{C}}$$

- Opazimo, da smo spotoma dokazali, da je vsak dvostranski ideal jedro nekega homomorfizma ($q : K \to K/I$)

Vprašanje: Za kakšne $I \triangleleft K$ je K/I obseg?

Trditev

(Komutativni) kolobar K je obseg $\Leftrightarrow$ K nima pravih idealov

Dokaz

$\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$ $0 \neq a \in K$ $\quad (a)$ je ideal v K $\Rightarrow$ $(a) = K$

$\Rightarrow$ obstaja a' $\quad a \cdot a' = 1$ $\Rightarrow a' = a^{-1}$

tj. vsak neničeln a je obrnljiv ✓

$\boxtimes$

Kaj so ideali v K/I?

$(12) \triangleleft \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Z}/(12) = \mathbb{Z}_{12}$

gledamo $q: K \longrightarrow K/I$

$x \longmapsto x + I$

Če je $J \triangleleft K$ $\quad q(J)$ je ideal v K/I ✓

Obratno, če $J \triangleleft K/I$, potem je $q^{-1}(J) \triangleleft K$, ki vsebuje I ✓

Dokazali smo

Trditev $q: K \to K/I$ določa bijekcijo

$\{$ideali v K, ki vsebujejo $I\} \longleftrightarrow \{$ideali v $K/I\}$

$\boxtimes$