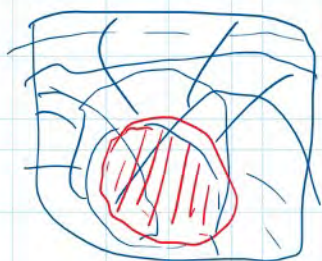


(1) Kolobar je obseg, ako ni max prvni...



K/I

IREK

$I \triangleleft K$

K/I je obseg $\Leftrightarrow I$ je maksimalen ideal v K

(tj. pravi ideal v K , ki ni vsebovan v noben večjem pravem idealu)

Dokaži

K/I obseg $\Leftrightarrow K/I$ nima pravih idealov

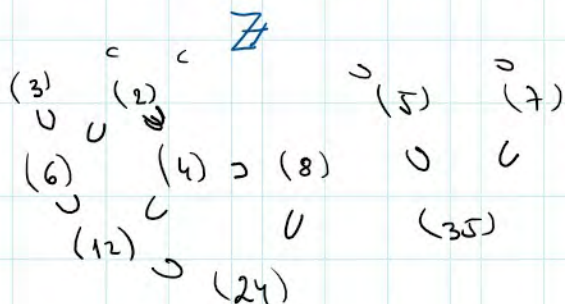
$\Leftrightarrow$ v K ni pravih idealov, ki so večji kot I

$\Leftrightarrow I$ je max v K

Primeri

v $\mathbb{Z}$ ideali so $(n) = n \cdot \mathbb{Z}$

Kdaj je $(n) \leq (m)^2 \Leftrightarrow m$ deli n



- V $\mathbb{C}[x]$ so vsi maksimalni ideali oblike $(x-z)$, $z \in \mathbb{C}$ (tj. samo večkratnik linearnega polinoma)

$(x-z)$ je maximalen.

$$f_z: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\ker f_z = (x-z)$$

$$\operatorname{Im} f_z = \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}[x] / (x-z) \xrightarrow[\cong]{f_z} \mathbb{C}$$

$\hookrightarrow$ je obseg, zato je ideal $(x-z)$ max.

$$I \triangleleft^{\max} \mathbb{C}[x] \leadsto I = (p(x)) \text{ in } p(x) \text{ je linearen}$$

če $p(x)$ ni linearen, potem ima kompleksno ničlo, kar pomeni, da ga lahko napišemo kot $p(x) = (x-z)q(x)$, s čimer $q(x) \neq 1$

$$I = (p(x)) \subsetneq (q(x)) \subsetneq \mathbb{C}[x]$$

Tega sklepa ne moremo uporabiti za $\mathbb{R}[x]$

Izrek

R obseg, $I \triangleleft R[x]$ je max $\Leftrightarrow I = (p(x))$, kjer je $p(x)$ nerazcepen nad R

($p(x)$ je nerazcepen nad R , če ne obstajata $q(x), r(x) \in R[x]$ stopnje vsaj 1, da je $p(x) = q(x) \cdot r(x)$)

Primeri

$$x^2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot (3x^2 + 3) \text{ ni razcep, nerazcepen nad } \mathbb{R}$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \text{ razcepen nad } \mathbb{R}$$

$$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i) \text{ razcepen nad } \mathbb{C}$$

Dokaz

$$(\Rightarrow) \text{ } p(x) \text{ razcepen} \Rightarrow (p(x)) \text{ ni max}$$

$$p(x) = q(x) \cdot r(x)$$

$$\text{st } q(x) \geq 1$$

$$\text{st } r(x) \geq 1$$

$$(p(x)) \subsetneq (q(x)) \subsetneq R[x]$$

$$(\Leftarrow) \text{ } I = (p(x)) \text{ ni max} \Rightarrow p(x) \text{ razcepen}$$

$$(p(x)) \subsetneq \bigcup_{(q(x))} \subsetneq \mathbb{R}[x]$$

$$q(x) \mid p(x) \Rightarrow p(x) = q(x) \cdot r(x)$$

$\hookrightarrow \text{if } r(x) \geq 1$
 $\hookrightarrow \text{if } q(x) \geq 1$

$\hookrightarrow r(x)$ is not a constant.

