

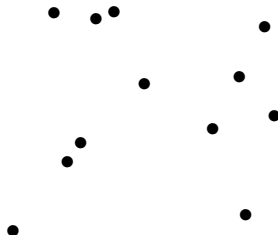
Približnostni algoritmi za k -center problem

Luka Toplak in Anže Ozimek

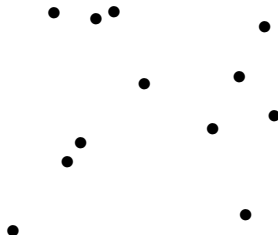
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

1. april 2022

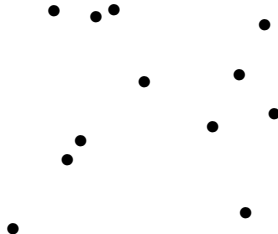
- Na voljo imamo n prostih zemljišč



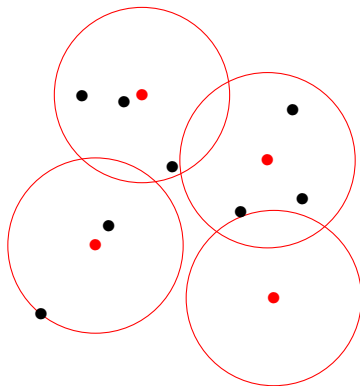
- Na voljo imamo n prostih zemljišč
- Zgraditi želimo k gasilskih postaj



- Na voljo imamo n prostih zemljišč
- Zgraditi želimo k gasilskih postaj
- Razdalija od zemljišča do najbližje gasilske postaje naj bo čim manjša



- Na voljo imamo n prostih zemljišč
- Zgraditi želimo k gasilskih postaj
- Razdalija od zemljišča do najbližje gasilske postaje naj bo čim manjša



Problem

- Optimizacijski problem oblike $((P, k), f, \min)$

Problem

- Optimizacijski problem oblike $((P, k), f, \min)$
- $P = \{p; p \in \mathbb{R}^m\}$

Problem

- Optimizacijski problem oblike $((P, k), f, \min)$
- $P = \{p; p \in \mathbb{R}^m\}$
- V P vpeljemo razdalijo d

Problem

- Optimizacijski problem oblike $((P, k), f, \min)$
- $P = \{p; p \in \mathbb{R}^m\}$
- V P vpeljemo razdalijo d
- $k \in \mathbb{N}$

Problem

- Optimizacijski problem oblike $((P, k), f, \min)$
- $P = \{p; p \in \mathbb{R}^m\}$
- $\forall P$ vpeljemo razdalijo d
- $k \in \mathbb{N}$
- $C \subseteq P; |C| = k$

Problem

- Optimizacijski problem oblike $((P, k), f, \min)$
- $P = \{p; p \in \mathbb{R}^m\}$
- $\forall p \in P$ vpeljemo razdalijo d
- $k \in \mathbb{N}$
- $C \subseteq P; |C| = k$
- $f = \max_{p \in P} d(p, C)$

Aproksimacijski algoritmi

- Postopki, ki za rešitev problema vrnejo aproksimacijo, ta pa ni večja od $t \cdot \text{opt}$, pri $t \in \mathbb{R}$

Aproksimacijski algoritmi

- Postopki, ki za rešitev problema vrnejo aproksimacijo, ta pa ni večja od $t \cdot \text{opt}$, pri $t \in \mathbb{R}$
- Hitro izračunana približna rešitev več vredna kot točna rešitev

Aproksimacijski algoritmi

- Postopki, ki za rešitev problema vrnejo aproksimacijo, ta pa ni večja od $t \cdot \text{opt}$, pri $t \in \mathbb{R}$
- Hitro izračunana približna rešitev več vredna kot točna rešitev
- Problemi:
 - Problem nahrbtnika ($t = 1 + \epsilon$)
 - Problem trgovskega potnika ($t = \frac{3}{2}$)
 - Minimalno vozliščno pokritje ($t = 2$)

Sh algoritem

- Poleg množice točk P in števila k moramo podati tudi r

Sh algoritem

- Poleg množice točk P in števila k moramo podati tudi r
- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C

Sh algoritem

- Poleg množice točk P in števila k moramo podati tudi r
- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C
- Med točkami $p_c \in P \setminus C$ izberemo eno izmed tistih, za katero velja $d(p_c, C) > 2r$ - če tak p_c ne obstaja pogoj zanemarimo

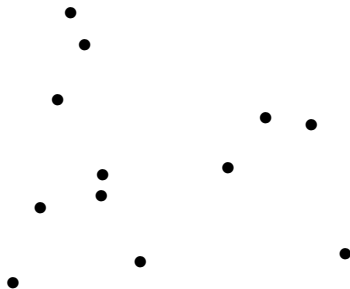
Sh algoritem

- Poleg množice točk P in števila k moramo podati tudi r
- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C
- Med točkami $p_c \in P \setminus C$ izberemo eno izmed tistih, za katero velja $d(p_c, C) > 2r$ - če tak p_c ne obstaja pogoj zanemarimo
- To ponavljamo dokler je $|C| < k$

Sh algoritem

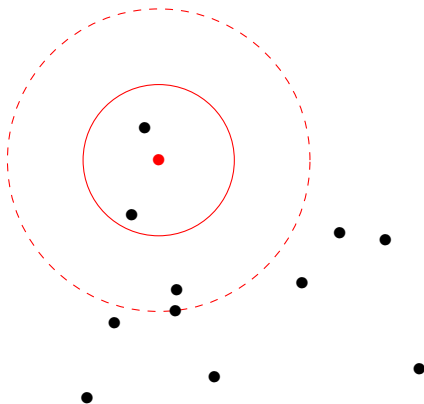
- Poleg množice točk P in števila k moramo podati tudi r
- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C
- Med točkami $p_c \in P \setminus C$ izberemo eno izmed tistih, za katero velja $d(p_c, C) > 2r$ - če tak p_c ne obstaja pogoj zanemarimo
- To ponavljamo dokler je $|C| < k$
- $R(C)$ - vrne najmanjši r za dan izbor centrov $C[1]$
- $r > r^* \implies R(C) < 2r$
- $r < r^* \implies R(C) > 2r$
- $r = r^*$: algoritem vrne rešitev z aproksimacijskim faktorjem $t = 2$

Primer – Sh



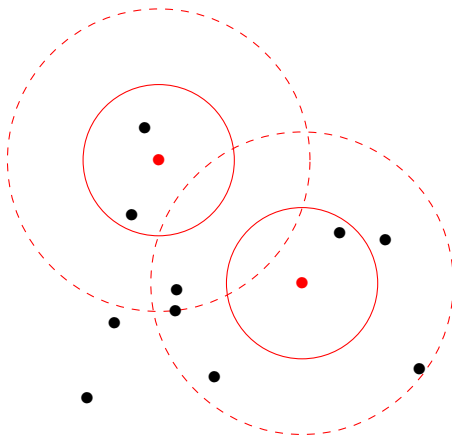
$$n = 12, k = 4, r = 1$$

Primer – Sh



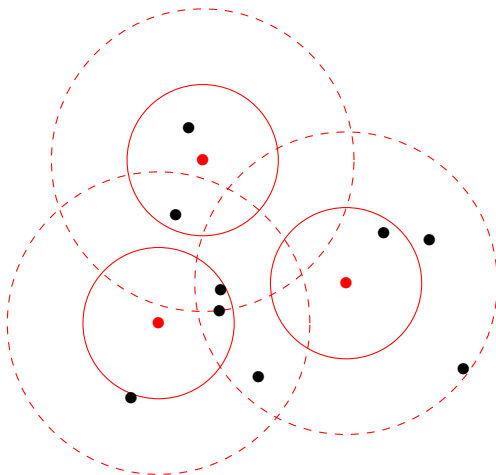
$$n = 12, k = 4, r = 1$$

Primer – Sh



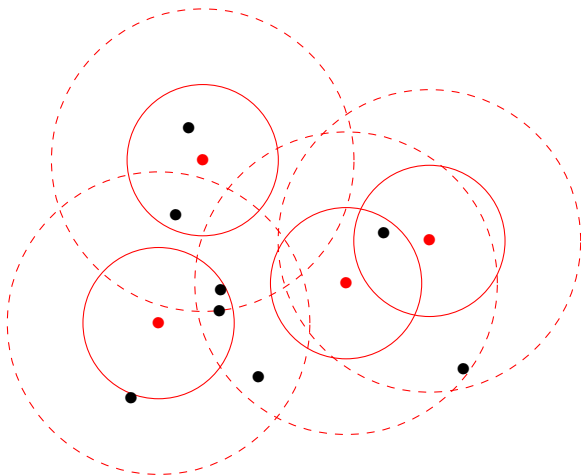
$$n = 12, k = 4, r = 1$$

Primer – Sh



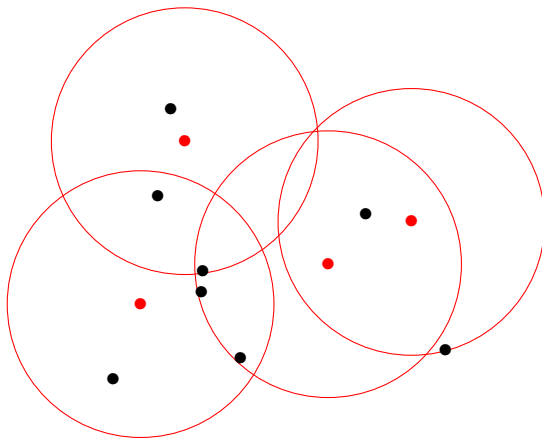
$$n = 12, k = 4, r = 1$$

Primer – Sh



$$n = 12, k = 4, r = 1$$

Primer – Sh



$$n = 12, k = 4, r = 1, R(C) = 1.763$$

HS algoritem

- Sh algoritem uporabi kot osrednji del

HS algoritem

- Sh algoritem uporabi kot osrednji del
- Izračunamo in naraščajoče uredimo razdalije med vsemi pari točk

HS algoritem

- Sh algoritem uporabi kot osrednji del
- Izračunamo in naraščajoče uredimo razdalije med vsemi pari točk
- Na urejeni tabeli razdalij izvedemo bisekcijo, meje premikamo glede na rezultat Sh algoritma

Gon algoritem

- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C

Gon algoritem

- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C
- Izberemo $p_c \in P \setminus C$ za katerega velja $d(p_c, C) = \max_{p \in P \setminus C} d(p, C)$ - izberemo točko p_c , ki je od C najbolj oddaljena

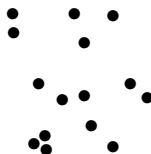
Gon algoritem

- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C
- Izberemo $p_c \in P \setminus C$ za katerega velja $d(p_c, C) = \max_{p \in P \setminus C} d(p, C)$ - izberemo točko p_c , ki je od C najbolj oddaljena
- Točko p_c dodamo v C

Gon algoritem

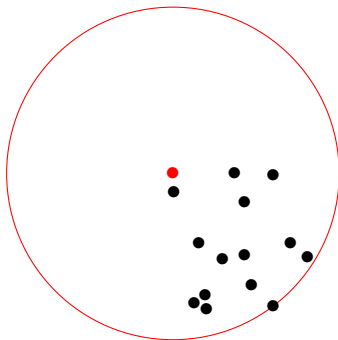
- Izberemo poljubno točko $p \in P$ in dodamo v C
- Izberemo $p_c \in P \setminus C$ za katerega velja $d(p_c, C) = \max_{p \in P \setminus C} d(p, C)$ - izberemo točko p_c , ki je od C najbolj oddaljena
- Točko p_c dodamo v C
- Po $k - 1$ korakih je $|C| = k$

Primer z enakomerno porazdeljenimi točkami – Gon



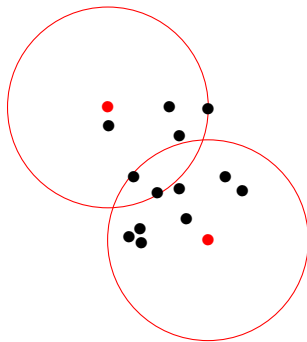
$$n = 15, k = 5$$

Primer z enakomerno porazdeljenimi točkami – Gon



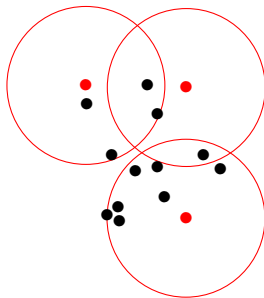
$$n = 15, k = 5$$

Primer z enakomerno porazdeljenimi točkami – Gon



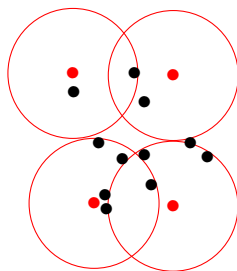
$$n = 15, k = 5$$

Primer z enakomerno porazdeljenimi točkami – Gon



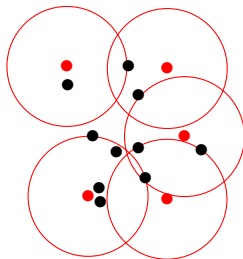
$$n = 15, k = 5$$

Primer z enakomerno porazdeljenimi točkami – Gon



$$n = 15, k = 5$$

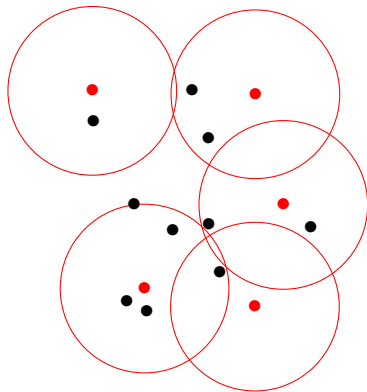
Primer z enakomerno porazdeljenimi točkami – Gon



$$n = 15, k = 5$$

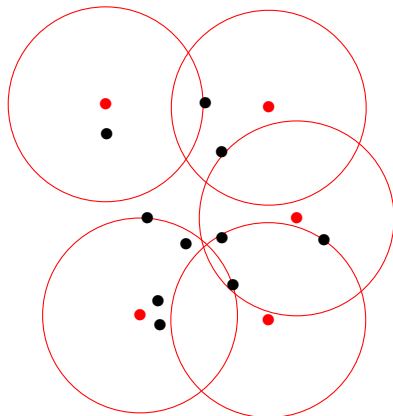
Primerjava z optimalno rešitvijo

Optimalna rešitev



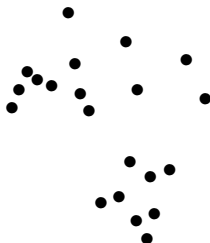
$$r = 1.716$$

Približna rešitev (Gon)



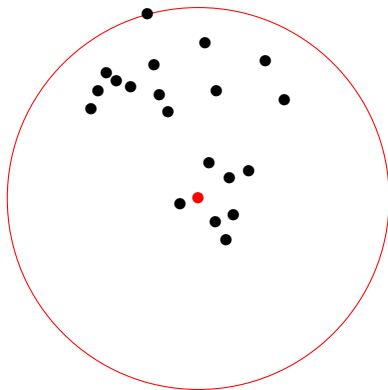
$$r = 1.982$$

Primer z gručami točk – Gon



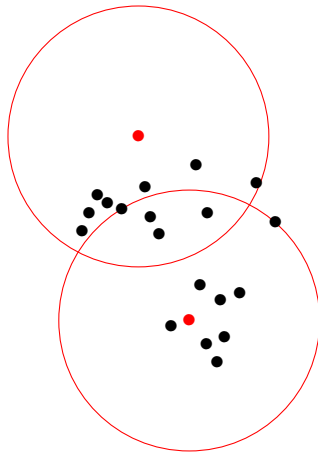
$$n = 21, k = 3$$

Primer z gručami točk – Gon



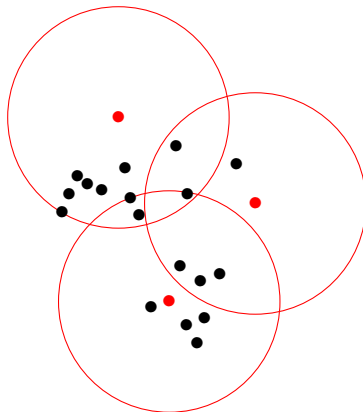
$$n = 21, k = 3$$

Primer z gručami točk – Gon



$$n = 21, k = 3$$

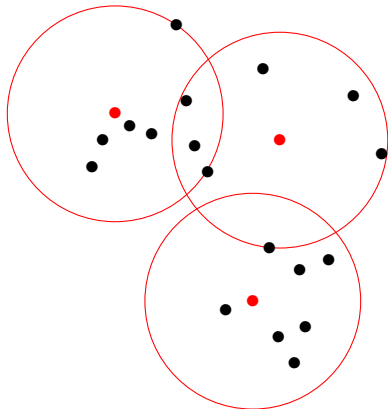
Primer z gručami točk – Gon



$$n = 21, k = 3$$

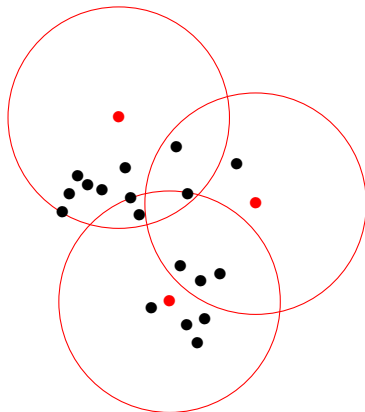
Primerjava z optimalno rešitvijo

Optimalna rešitev



$$r = 2.378$$

Približna rešitev (Gon)



$$r = 3.660$$

Primerjava algoritmov

Algo.	Enakomerna porazdelitev		Gruče	
	Povprečje	Varianca	Povprečje	Varianca
HS	12.166	3.981	11.404	5.113
Gon	11.781	4.088	10.881	5.036

Primerjava algoritmov

Algo.	Enakomerna porazdelitev		Gruče	
	Povprečje	Varianca	Povprečje	Varianca
HS	12.166	3.981	11.404	5.113
Gon	11.781	4.088	10.881	5.036

$$Sh - \mathcal{O}(kn)$$

Primerjava algoritmov

Algo.	Enakomerna porazdelitev		Gruče	
	Povprečje	Varianca	Povprečje	Varianca
HS	12.166	3.981	11.404	5.113
Gon	11.781	4.088	10.881	5.036

$$\text{Sh} - \mathcal{O}(kn)$$

$$\text{HS} - \mathcal{O}(n^2 \log n)$$

Primerjava algoritmov

Algo.	Enakomerna porazdelitev		Gruče	
	Povprečje	Varianca	Povprečje	Varianca
HS	12.166	3.981	11.404	5.113
Gon	11.781	4.088	10.881	5.036

$$\text{Sh} - \mathcal{O}(kn)$$

$$\text{HS} - \mathcal{O}(n^2 \log n)$$

$$\text{Gon} - \mathcal{O}(kn)$$



Jesus Garcia-Diaz, Rolando Menchaca-Mendez, Ricardo Menchaca-Mendez, Saúl Pomares Hernández, Julio César Pérez-Sansalvador, and Noureddine Lakouari.

Approximation algorithms for the vertex k -center problem: Survey and experimental evaluation.

IEEE Access, 7:109228–109245, 2019.

- Vertex k -center problem, Wikipedia
(https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_k-center_problem)
(Datum dostopa: 31. 3. 2021)
- Metric k -center, Wikipedia
(https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_k-center)
(Datum dostopa: 31. 3. 2021)