

Reševanje logičnih ugank o vitezih in oprodah z enačbami

Aljaž Pavlovič in Bor Bregant
Fakulteta za matematiko in fiziko

1. april 2022

1 Vitezi in oprode

Logične uganke o vitezih in oprodah so tipično sestavljene na sledeči način:

- na fiktivnem otoku živijo vitezi, ki vedno govorijo resnico, in oprode, ki vedno lažejo,
- vsak otočan je natanko ene vrste, torej bodisi vitez bodisi oproda,
- vsak otočan pozna vrsto vsakega otočana (vključno s svojo),
- nekateri otočani nam podajo izjave o tem, katere vrste so drugi otočani ali oni sami.

Uganko rešimo, ko za vsakega (v uganki nastopajočega) otočana določimo, katere vrste je.

Primer 1 *Na otoku srečamo skupino treh otočanov – Alojza, Brina in Cirila. Alojz reče, da je Ciril oproda. Tudi Brina izjavi, da je Ciril oproda. Brina dodatno pripomni, da Alojz in Ciril nista otočana iste vrste. Določi, katere vrste otočan je vsak od njih.*

Uganko iz primera lahko rešimo kar s preizkušanjem, saj imamo v primeru treh otočanov le $2^3 = 8$ možnih rešitev. Izpeljali bomo, da je reševanje te naloge ekvivalentno reševanju sistema enačb

$$\begin{cases} a = c + 1 \\ b = c + 1 \\ b = a + c \end{cases}.$$

2 Logika preko algebre

2.1 Izjave in njihove vrednosti

V SSKJ najdemo naslednjo definicijo.

Definicija 1 Izjava je vsak stavek, ki je pravilen ali napačen.

Ob tem pripomnimo, da ne nujno vemo, katera od teh dveh alternativ drži.

Primer 2

- "2 plus 2 je 4."
- "−1 je 3."
- " e^x je integrabilna in $|x|$ je odvedljiva, če in samo če je masa Zemlje večja od mase Sonca."

Definicija 2 Vrednost izjave je njena resničnostna vrednost, torej bodisi resnica bodisi neresnica.

Za vrednost izjave P bomo uporabili oznako $\llbracket P \rrbracket$.

Iz praktičnih razlogov bomo pisali:

- $\llbracket P \rrbracket = 1$, če in samo če je P resnica,
- $\llbracket P \rrbracket = 0$, če in samo če je P neresnica.

Opazimo, da sta izraza " $\llbracket P \rrbracket = 1$ " in " $\llbracket P \rrbracket = 0$ " tudi izjavi. Za njuni vrednosti velja

$$\llbracket \llbracket P \rrbracket = 1 \rrbracket = \llbracket P \rrbracket$$

za obe možni vrednosti izjave P .

2.2 Modularna aritmetika

Definicija 3 *Element x kolobarja je idempotent, če $x^2 = x$.*

Definicija 4 *Kolobar K imenujemo Boolov kolobar, če je vsak njegov element idempotent.*

Množica vrednosti izjav $\{0, 1\}$ je Boolov kolobar. Še več, $\{0, 1\}$ je polje karakteristike 2, torej velja $x + x = 0$ za vsak x .

Ravno te lastnosti nam omogočijo, da lahko izjave pretvorimo v enačbe in jih tudi rešujemo.

2.3 Izjavni vezniki

Ker v logičnih ugankah o vitezh in opredah nastopajo sestavljene izjave z različnimi izjavnimi vezniki, je smiselno ugotoviti, kako se izražajo v našem kolobarju.

Izjavni veznik	Izražava s standardnimi vezniki	Izražava v kolobarju
Konjunkcija	$p \wedge q$	pq
Disjunkcija	$p \vee q$	$pq + p + q$
Negacija	$\neg p$	$p + 1$
Implikacija	$q \vee \neg p$	$pq + p + 1$
Ekvivalenca	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$p + q + 1$

Veljavnosti izražav v kolobarju lahko bralec preveri s primerjanjem vrednosti izražave in resničnostne tabele za izbrani izjavni veznik.

3 Iz uganke v enačbe

Ko nam otočan A poda izjavo P , to prevedemo v enačbo

$$a = p,$$

kjer je $a = \llbracket \text{"A je vitez."} \rrbracket$ in $p = \llbracket P \rrbracket$.

To je smiselno, ker bo tako v primeru, ko je A vitez, njegova izjava resnična. V nasprotnem primeru, ko je A oproda, je pa njegova izjava neresnična.

Splošna oblika logične uganke o vitezih in oprodah sestoji iz izjav $P_1, \dots, P_n$, ki jih podajo otočani $A_1, \dots, A_n$. Ob tem je dovoljeno, da nek otočan poda tudi več izjav. Mi pa lahko ta problem prevedemo na reševanje sistema enačb

$$\begin{cases} a_1 = p_1 \\ \dots \\ a_n = p_n \end{cases}$$

v našem kolobarju.

Primer 3 Na otoku srečamo otočana A in B. Otočan A izjavi: "Če je B oproda, potem sem tudi jaz oproda." Določi, katere vrste otočan je vsak od njiju.

Primer 4 Na otoku srečamo skupino treh otočanov – A, B in C. Najprej A izjavi: "Če je C vitez, potem je tudi B vitez." Potem pride do besede še B in reče: "A je oproda, če in samo če je C vitez." Določi, katere vrste otočan je vsak od njih.

Primer 5 Na otoku srečamo skupino štirih otočanov – A, B, C in D. A izjavi: "B je oproda in D je vitez," B izjavi: "C je oproda in A je vitez," C izjavi: "A je oproda in B je vitez." Določi, katere vrste otočan je vsak od njih.

4 Naprednejše različice vitezov in oprod

4.1 Normalneži

Normalneži so taka vrsta otočanov, ki včasih govorijo resnico, včasih pa lažejo.

Problem rešimo tako, da za vsakega otočana A poleg spremenljivke $a = \llbracket \text{"A je vitez."} \rrbracket$, vpeljemo še spremenljivko $a' = \llbracket \text{"A je oproda."} \rrbracket$ in dodamo enačbo $aa' = 0$. Ta enačba simbolizira dejstvo, da A ne more biti hkrati vitez in oproda. Interpretiramo:

- A je vitez, če in samo če $a = 1$,
- A je oproda, če in samo če $a' = 1$,

- A je normalnež, če in samo če $a = a' = 0$.

Ko nam A poda izjavo P vemo, da bosta naslednji izjavi zagotovo resnični:

- če je A vitez, potem je P resnica,
- če je A oproda, potem je P neresnica.

To v naš sistem enačb zapišemo kot

$$\begin{cases} a = ap \\ a'p = 0 \end{cases}.$$

Opazimo lahko, da že iz tega sledi enakost $aa' = 0$. Če bi veljalo $a = a' = 1$, bi p bil hkrati 0 in 1.

Primer 6 *Na otoku vitezov, oprod in normalnežev srečamo otočana A in B. A nam pove: "B je vitez," B pa izjavi: "A ni vitez." Določi, katere vrste otočan je vsak od njiju.*

4.2 Paži

Paži so taka vrsta otočanov, ki vsak drugi dan govorijo resnico, vsak vmesni dan pa lažejo. Naloge, ki vključujejo paže, imajo navadno podane podatke o interakciji z otočani tekom dveh dni.

Problem rešimo tako, da vrsto vsakega otočana A določimo preko urejenega para (a_1, a_2) , kjer je $a_i = 1$, če in samo če je A i -ti dan govoril resnico. Interpretiramo:

- A je vitez, če in samo če $(a_1, a_2) = (1, 1)$,
- A je oproda, če in samo če $(a_1, a_2) = (0, 0)$,
- A je paž, če in samo če velja $(a_1, a_2) = (1, 0)$ ali $(a_1, a_2) = (0, 1)$.

Sistem enačb tvorimo tako, da izjave vsakega otočana A podane i -ti dan označimo z a_i , rešujemo ga pa kot v standardni različici ugank o vitezi in oprodah.

Primer 7 Na otoku vitezov, oprod in pažev smo včeraj srečali trojico otočanov – A , B in C . A je izjavil: "Jaz sem paž," B je rekel: "Jaz se vitez," C pa je dejal: "Jaz sem oproda." Danes zjutraj smo ponovno srečali to trojico, tokrat pa je A izjavil: " B je vitez," B je rekel: " C je paž," C pa je dejal: " A je paž." Določi, katere vrste otočan je vsak od njih.

Literatura

- [1] Francesco Ciraulo in Samuele Maschio, *Solving knights-and-knaves with one equation*, The College Mathematics Journal, **51:2** (2020), 82–89.

Rešitve nalog iz primerov

Primer 1: Alojz in Brina sta viteza, Ciril je oproda.

Primer 2:

- $\llbracket \text{"2 plus 2 je 4."} \rrbracket = 1,$
- $\llbracket \text{"-1 je 3."} \rrbracket = 0,$
- $\llbracket \text{"}e^x \text{ je integrabilna in } |x| \text{ je odvedljiva, če in samo če je masa Zemlje večja od mase Sonca."} \rrbracket = 1.$

Primer 3: A je oproda, B je vitez.

Primer 4: A in B sta viteza, C je oproda.

Primer 5: A, B, C in D so oprode.

Primer 6: Dobimo tri možne rešitve:

- A je oproda in B je normalnež,
- A je normalnež in B je vitez,
- A in B sta normalneža.

Primer 7: A, B in C so paži.