

Odvod

1. Po definiciji izračunaj odvod funkcije.

(a) $f(x) = x^3$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \ln x$

Rešitev:

(a) $f'(x) = 3x^2$

(b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

(c) $f'(x) = \frac{1}{x}$

2. Dokaži, da funkcija $f(x) = |x|$ ni odvedljiva v točki 0.

3. Odvajaj naslednje funkcije.

(a) $f(x) = \frac{12}{x^7} + 2\sqrt[5]{x} - \frac{6}{x^{-2}}$

(b) $f(x) = 8x^{\frac{3}{2}} - 2x + x^{14} + x^e + 1$

(c) $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt[3]{x}$

(d) $f(x) = (x^2 - \sqrt{2})^3$

(e) $f(x) = (x^\pi + \sqrt{x})(x^2 - 3x^{-\frac{3}{7}})$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

(g) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+7x-1}$

(h) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(i) $f(x) = (ax^2 + bx + c)^n$

(j) $f(x) = \cos^3 x$

(k) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

(l) $f(x) = \cos^2 x \cos(2x)$

(m) $f(x) = \operatorname{sh} x$

(n) $f(x) = \operatorname{ch} x$

(o) $f(x) = x^3 \cos(1 - 5x^2)$

(p) $f(x) = e^{-x^2} + 3^x + 3x - 130$

(q) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(r) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

(s) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

(t) $f(x) = \frac{x \cos x}{\tan x}$

(u) $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$

(v) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(w) $f(x) = \arcsin(e^x)$

(x) $f(x) = e^{\arcsin x}$

(y) $f(x) = x^x$

Rešitev:

- | | |
|---|--|
| (a) $f'(x) = -\frac{84}{x^8} + \frac{2}{5x^{\frac{4}{5}}} - 12x$ | (m) $f'(x) = \operatorname{ch} x$ |
| (b) $f'(x) = 12\sqrt{x} - 2 + 14x^{13} + ex^{e-1}$ | (n) $f'(x) = \operatorname{sh} x$ |
| (c) $f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}}$ | (o) $f'(x) = 3x^2 \cos(1-5x^2) + 10x^4 \sin(1-5x^2)$ |
| (d) $f'(x) = 6x(x^2 - \sqrt{2})^2$ | (p) $f'(x) = (-2x)e^{-x^2} + 3^x \ln 3 + 3$ |
| (e) $f'(x) = (\pi x^{\pi-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2 - 3x^{-\frac{3}{7}}) + (x^\pi + \sqrt{x})(2x + \frac{9}{7x^{\frac{10}{7}}})$ | (q) $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ |
| (f) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1+\sqrt{x})^2}}$ | (r) $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ |
| (g) $f'(x) = \frac{10x^2-6x-11}{(x^2+7x-1)^2}$ | (s) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ |
| (h) $f'(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x(x-1)^2}}$ | (t) $f'(x) = \frac{\tan x (\cos x - x \sin x) - \frac{x}{\cos x}}{\tan^2 x}$ |
| (i) $f'(x) = n(ax^2 + bx + c)^{n-1}(2ax + b)$ | (u) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ |
| (j) $f'(x) = -3 \cos^2 x \sin x$ | (v) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ |
| (k) $f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x$ | (w) $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ |
| (l) $f'(x) = -2 \cos x \cos(2x) \sin x - 2 \cos^2 x \sin(2x)$ | (x) $f'(x) = e^{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| | (y) $f'(x) = x^x (\ln x + 1)$ |

4. Dokaži, da se funkciji $f(x) = \arctan x$ in $g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ razlikujeta samo za konstanto in jo izračunaj.

Rešitev: Odvoda sta enaka, $f(0) = 0$ in $g(0) = 0$, torej $f(x) - g(x) = 0$.

5. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ ax + b & ; x < 1 \end{cases}.$$

Določi konstanti a in b tako, da bo funkcija f zvezno odvedljiva. Ali je dobljena funkcija dvakrat zvezno odvedljiva?

Rešitev: $a = 2$, $b = -1$. Dobljena f ni dvakrat zvezno odvedljiva.

6. Ali je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}.$$

- (a) zvezna,
- (b) odvedljiva v $x = 0$,
- (c) zvezno odvedljiva v $x = 0$?

Rešitev:

- (a) da
- (b) da
- (c) da

7. Ali je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} ; & x \neq 0 \\ 0 ; & x = 0 \end{cases}$$

odvedljiva? Ali je zvezno odvedljiva?

Rešitev: Funkcija je odvedljiva povsod. Njen odvod je

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} ; & x \neq 0 \\ 0 ; & x = 0 \end{cases}.$$

Odvod ni zvezen v 0.

8. Izračunaj višje odvode funkcij.

- (a) $f(x) = x^n, f^{(n)}(x)$
- (b) $f(x) = \sin(3x), f^{(51)}(x)$
- (c) $f(x) = \frac{1}{x}, f^{(n)}(x)$
- (d) $f(x) = x^2 e^{-x}, f^{(10)}(x)$

Rešitev:

- (a) $f^{(n)}(x) = n!$
- (b) $f^{(51)}(x) = -3^{51} \cos(3x)$
- (c) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
- (d) $f^{(10)}(x) = e^{-x}(x^2 - 20x + 90)$

9. Zapiši enačbi tangente in normale na graf funkcije

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 1)e^x$$

v točki $T(0, y_0)$.

Rešitev: Enačba tangente je $-2x + 1$, enačbe normale je $\frac{1}{2}x + 1$.

10. Izračunaj odvod funkcije f v točki $x = 2$, če veš, da je $f(2) = 3$ in točka $(4, 5)$ leži na tangenti na graf funkcije v točki $x = 2$.

Rešitev: $f'(2) = 1$

11. Poišči vse točke, v katerih je tangenta na parabolo $y = x^2 - 7x + 3$ vzporedna premici $5x + y - 3 = 0$.

Rešitev: $x = 1$

12. Poišči tiste tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, ki so vzporedne premici $y = 9x + 2$.

Rešitev: $y = 9x - 4$, $y = 9x + 28$.

13. Dokaži, da je ploščina trikotnika, ki ga tangenta na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ omejuje z obema koordinatnima osema, vedno enaka 2.

14. Dokaži, da za poljubno realno število x velja $e^x \geq 1 + x$.

15. Pod kakšnim kotom krivulja $y = \tan x$ seka abscisno os?

Rešitev: $\frac{\pi}{4}$

16. Pod kakšnim kotom krivulja $y = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{3x}$ seka ordinatno os?

Rešitev: $\frac{\pi}{6}$

17. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = \sin x$ in $y = \cos x$.

Rešitev: $\arctan(2\sqrt{2})$

18. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Poišči kot, pod katerim se sekata tangenti na graf funkcije v njegovih presečiščih z abscisno osjo.

Rešitev: $\frac{\pi}{2}$

19. Izračunaj odvod implicitno podane funkcije $y = y(x)$.

(a) $x^2 + y^3 + 2y^2 + 2xy = 1$,

(b) $\ln y + e^{xy^2} = x$,

(c) $x^y = y^x$.

Rešitev:

(a) $y' = \frac{-2x-2y}{3y^2+4y+2x}$

(b) $y' = \frac{1-y^2e^{xy^2}}{\frac{1}{y}+2xye^{xy^2}}$

(c) $y' = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}$

20. Poišči enačbo tangente na krivuljo $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$ v točki $(1, 2)$.

Rešitev: $y = \frac{14}{13}x + \frac{12}{13}$.

21. Dokaži, da je dolžina odseka tangente med obema koordinatnima osema za astroido konstantna. Astroida je podana z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0.$$

Rešitev: Dolžina odseka je enaka a .

22. Dokaži, da ima funkcija $f(x) = 3x + \sin(2x)$ inverzno funkcijo in izračunaj $(f^{-1})'(3\pi)$.

Rešitev: $(f^{-1})'(3\pi) = \frac{1}{5}$

23. Zapiši enačbo normale na elipso $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ v točki $(1, b)$, kjer je $b > 0$.

Rešitev: $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{5\sqrt{3}}{6}$

24. Poišči vse vrednosti parametra a , pri katerih se krivulji $y_1 = axe^{-x}$ in $y_2 = 6axe^{-x}$ sekata pod kotom $\frac{\pi}{4}$.

Rešitev: $a \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}\}$

25. Poišči vse intervale, na katerih je funkcija $f(x) = x + \arcsin(\cos x)$ konstantna. Na vsakem od teh intervalov izračunaj njeno vrednost in nariši njen graf. Ali je f v točki 0 odvedljiva?

Rešitev: Funkcija je konstantna na intervalih $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, kjer je njena vrednost enaka $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Funkcija v točki 0 ni odvedljiva.

26. S pomočjo diferenciala približno oceni vrednost naslednjih izrazov.

(a) $\ln(0.9)$

(b) $\sqrt[3]{8.3}$

(c) $\sqrt{\frac{0.9}{1.1}}$

(d) $\sin 29^\circ$

Rešitev:

(a) Približek -0.1 za točno vrednost -0.10536 .

(b) Približek 2.025 za točno vrednost 2.02469 .

(c) Približek 0.9 za točno vrednost 0.90453 .

(d) Približek 0.48489 za točno vrednost 0.48481 .

27. Določi stacionarne točke ter lokalne ekstreme naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3}$

(b) $f(x) = \sin x + \cos x$

- (c) $f(x) = (x - 1)^3 e^{-x}$
- (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Rešitev:

- (a) V točki 1 je lokalni minimum, v točki 3 pa lokalni maksimum.
 - (b) V točkah $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ so lokalni minimumi, v točkah $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pa so lokalni maksimumi.
 - (c) V točki 4 je lokalni maksimum, v točki 1 pa sedlo.
 - (d) V točkah ± 1 sta lokalna minimuma, v točki 0 pa je lokalni maksimum.
28. Poišči takšni števili a in b , da bo imela funkcija $f(x) = a \ln x - bx$ stacionarno točko v $(2, 1)$. Ali je ta točka lokalni minimum, lokalni maksimum ali nič od tega?

Rešitev: $a = \frac{1}{\ln 2 - 1}, b = \frac{1}{2(\ln 2 - 1)}$. Stacionarna točka je lokalni minimum.

29. Določi in klasificiraj stacionarne točke funkcije $f(x) = x^2 e^x$. Določi globalne ekstreme funkcije f na intervalu $[-4, 3]$.

Rešitev: Stacionarni točki sta 0 in -2 . Globalni minimum je v točki 0, globalni maksimum pa v 3.

30. Poišči globalne ekstreme funkcije:

- (a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ na intervalu $[0, 4]$.
- (b) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ na intervalu $[-1, 1]$.

Rešitev:

- (a) Globalni minimum je v točki 1, globalni maksimum pa v 4.
 - (b) Globalni minimum je v točki 1, globalni maksimum pa v -1 .
31. Naj bo $f(x) = x^4 e^x$. Določi zalogo vrednosti funkcije f , če je njeno definicijsko območje
- (a) $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1]$
 - (b) $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1]$
 - (c) $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$
 - (d) $\mathcal{D}_f = [-1, \infty)$

Rešitev:

- (a) $\mathcal{Z}_f = (0, \frac{256}{e^4}]$
- (b) $\mathcal{Z}_f = [0, \frac{256}{e^4}]$
- (c) $\mathcal{Z}_f = [0, e]$

(d) $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$

32. V krog s polmerom R včrtaj pravokotnik z največjo ploščino.

Rešitev: Kvadrat s stranico $a = \sqrt{2}R$ in ploščino $2R^2$.

33. Dana je točka $T(1, 2)$. Poišči točko na premici z enačbo $y = 2x - 1$, ki je točki T najbližje.

Rešitev: $\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$

34. Naj bosta $a, p > 0$. Na paraboli $y^2 = 2px$ poišči točko, ki je najbližja točki $(a, 0)$.

Rešitev: Če je $a > p$, sta to točki $(a - p, \pm \sqrt{2p(a - p)})$, sicer pa izhodišče koordinatnega sistema.

35. V ravnini je krog s polmerom R . V zgornji polkrog včrtaj tak trapez z največjo možno ploščino, katere daljša osnovnica ima za krajišči točki $(R, 0)$ in $(-R, 0)$.

Rešitev: Trapez z osnovnicama $2R$ in R ter višino $\frac{\sqrt{3}}{2}R$. Iskana ploščina je $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

36. Želimo izdelati okno, ki ima obliko pravokotnika, na dnu in vrhu pa je zaključeno z dvema polkrožnicama. Kakšne naj bodo dimenzije okna, če želimo največjo površino, na voljo pa imamo 50 metrov za okvir.

Rešitev: Polmer okna je $r = \frac{25}{\pi}$, višina pravokotnika pa 0. Torej okno mora biti okroglo.

37. V kateri točki elipse $x^2 + a^2y^2 = b^2$ njena tangenta oklepa s koordinatnima osema trikotnik najmanjše ploščine?

Rešitev: $T_0\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{a\sqrt{2}}\right), T_1\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{a\sqrt{2}}\right), T_3\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{a\sqrt{2}}\right), T_4\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)$.

38. Kolikšna je dolžina najdaljše palice, ki jo lahko nesemo skozi hodnik s pravokotnim ovinkom, če je širina hodnika pred ovinkom enaka a , po ovinku pa b .

Rešitev: $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

39. Ali so za funkcijo $f(x) = 1 - |x|^{\frac{2}{3}}$ na intervalu $[-1, 1]$ izpolnjeni pogoji Rollovega izreka?

Rešitev: Ne, funkcija f v točki 0 ni odvedljiva.

40. Dokaži, da ima polinom $f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8$ na intervalu $[-1, 0]$ natanko eno ničlo. Pomagaj si z Rollovim izrekom.

41. S pomočjo Lagrangevega izreka dokaži, da za poljubni realni števili x in y velja

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

42. Naj bo f zvezno odvedljiva na $[-7, 0]$. Naj velja $f(-7) = -3$ in $f'(x) \leq 2$ za vsak $x \in [-7, 0]$. Poišči največjo možno vrednost za $f(0)$.

Rešitev: $f(0) \leq 11$

43. Z uporabo Lagrangevega izreka dokaži, da za vsak $x > 0$ velja

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x.$$

44. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x}$, kjer je p poljuben polinom

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \arctan x)$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

(l) $\lim_{x \downarrow 0} \sin x \ln x$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

(m) $\lim_{x \downarrow 0} x^{\sin x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x$

(n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x) - x}$.

(g) $\lim_{x \downarrow 0} x \ln x$

(o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin -x - \frac{1}{6}x^3}{x^4}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

Rešitev:

(a) 1

(i) 2

(b) $\frac{1}{4}$

(j) 2

(c) 0

(k) 2

(d) $\frac{1}{2}$

(l) 0

(e) $\frac{2}{\pi}$

(m) 1

(f) 0

(n) 1

(g) 0

(o) 0

(h) 2

45. Izračunaj asimptoto funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.

Rešitev: Desna vodoravna asimptota je premica $y = \frac{1}{2}$. Leva vodoravna asimptota je premica $y = -2x - \frac{1}{2}$.

46. Dokaži, da je funkcija $f(x) = x \ln x$ konveksna.

Rešitev: $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ za $x \in \mathcal{D}_f$.

47. Za dana parametra a in σ poišči prevoje funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

Rešitev: Prevoja sta $a + \sigma$ in $a - \sigma$.

48. Natančno skiciraj grafe naslednjih funkcij. Določi definicijsko območje, sodost/lihost, ničle, pole, obnašanje na robu definicijskega območja, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti.

(a) $f(x) = x^4 - x^2$

(b) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3}$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}$

(d) $f(x) = x(\ln x)^2$

(e) $f(x) = xe^{-|x|}$

Rešitev:

