

7 Odvodi

Naloga 7.1. Izračunajte prve in druge odvode naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x - 3 + \frac{1}{3x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^5}$

(b) $f(x) = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 2$

(c) $f(x) = x \ln x$

(d) $f(x) = \ln(x^2)$

(e) $f(x) = e^{-x} \cos(2x)$

(f) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

(g) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3}$

(h) $f(x) = e^x + ex$

Naloga 7.2. Izračunajte prvih nekaj odvodov funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$. Iz dobljenega vzorca razberite formulo za n -ti odvod funkcije f .

Naloga 7.3. Izračunajte odvode naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\tan(x^2)}$

(b) $f(x) = x^{\cos x}$

(c) $f(x) = 2^{(x^x)}$

Naloga 7.4. Za naslednje funkcijske predpise določite definicijsko območje, presečišča grafa s koordinatnimi osmi (ničle in začetno vrednost), morebitne asimptote, območja naraščanja in padanja, stacionarne točke, lokalne ekstreme, prevoje, območja konveksnosti in konkavnosti, zalogo vrednosti ter čim natančneje narišite graf.

(a) $f(x) = x^2 + x - 6$

(b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

(c) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 4}$

(d) $f(x) = e^{2x-x^2} - 1$

(e) $f(x) = \frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)}$

(f) $f(x) = 3 \arctan\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

Naloga 7.5. Določite globalne ekstreme in zalogo vrednosti naslednjih funkcij:

- (a) $f(x) = x^2 - 3x$ na $[0, 4]$,
- (b) $f(x) = x - \ln x$ na $(0, 2]$,
- (c) $f(x) = e^{2x^3+3x^2-36x}$ na $[0, 3]$.

Naloga 7.6. Določite $a, b \in \mathbb{R}$ z vsoto 9, pri katerih je vrednost $a^2 + 2b$ minimalna.

Naloga 7.7. V območje, omejeno s krivuljama $y = 1 - x^2$ in $y = |x|$, včrtajte pravokotnik z največjo ploščino, katerega stranice so vzporedne s koordinatnima osema.

Naloga 7.8. Silos ima obliko pokončnega valja, na katerega je poveznjena kupola v obliki polkrogle. Cena enote površine valjastega dela silosa je dvakrat nižja od cene enote površine kupole. V kakšnem razmerju naj bosta polmer in višina valja, da bo pri dani prostornini silosa izgradnja silosa najcenejša?

Naloga 7.9. Kje in pod kakšnim kotom sekajo naslednje funkcije abscisno os?

- (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
- (b) $f(x) = x^3$
- (c) $f(x) = \cos(x)$

Naloga 7.10. Kje in pod kakšnim kotom se sekata grafa naslednjih funkcij?

- (a) $f(x) = 1 - x, g(x) = \ln(x)$
- (b) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x - 1$

Naloga 7.11. V kateri točki ima krivulja $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ tangento z naklonskim kotom $\frac{\pi}{4}$?

Naloga 7.12. Določite enačbo tangente na graf dane funkcije v dani točki.

- (a) $f(x) = x^3$ pri $x = 2$
- (b) $f(x) = \ln(x)$ pri $x = e$
- (c) $f(x) = x + e^x$ pri $x = 1$

Naloga 7.13. Izračunajte približno vrednost naslednjih izrazov tako, da ustrezno funkcijo aproksimirate z njeno tangento („aproksimacija z diferenciali“).

(a) 1.01^{10}

(b) $\sqrt[5]{32.3}$

(c) $\sin(0.02)$

(d) $\cos(3)$

(e) $e^{0.1}$

Naloga 7.14. Izračunajte naslednje limite s pomočjo L'Hospitalovega pravila.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \arctan x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - e^{-x} - \frac{2x}{x - \sin x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\ln(1-x)}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$