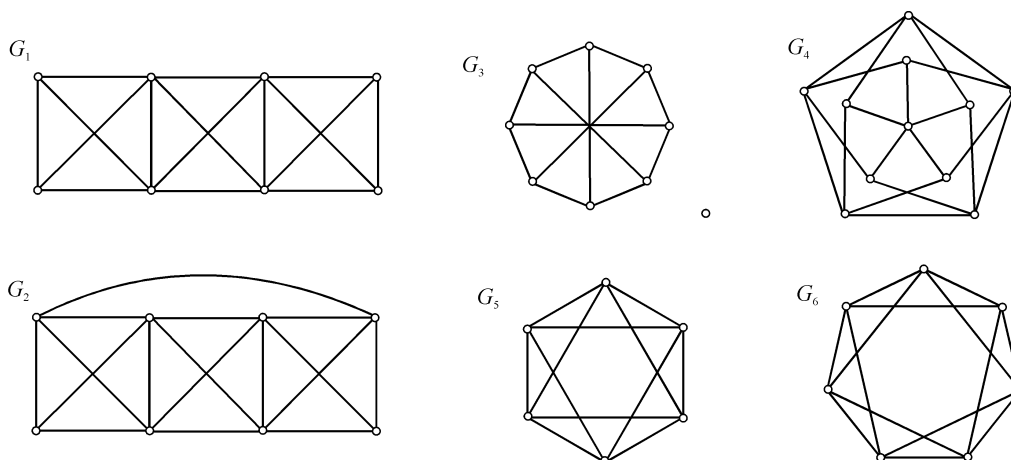


1. Ali so grafi iz spodnje slike ravninski?



2. Za katere $n > 0$ je hiperkocka Q_n ravninska?

3. Pokažite, da ima vsak povezan ravninski graf vsaj eno vozlišče stopnje največ 5. Pokažite, da ima povezan ravninski graf brez trikotnikov vsaj eno vozlišče stopnje največ 3.

4. Pokažite, da ima povezan kubičen (3-regularen) graf v ravnini, pri katerem so vsa lica petkotniki ali šestkotniki, natanko 12 petkotnikov.

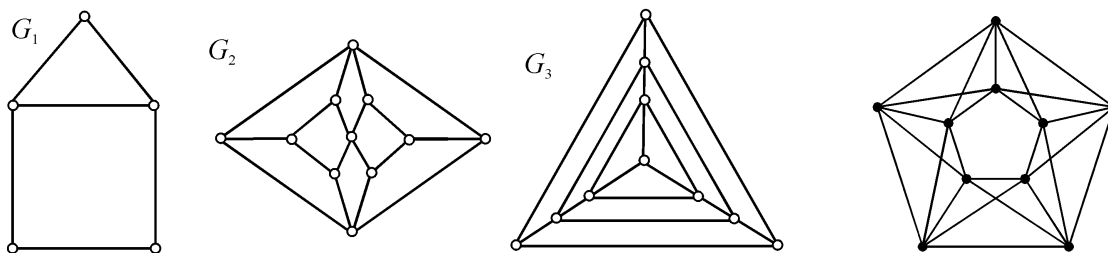
5. Naj bo G povezan regularen graf stopnje $p \geq 3$, vložen v ravnino tako, da imajo vsa lica enako število povezav $q \geq 3$ na robu. Kakšna sta lahko p in q ?

6. Ali je $C_n \square C_m$ ravninski? Če ni, ali se ga da narisati na kako drugo ploskev, brez da bi se povezave sekale?

7. Graf je *zunanje ravninski*, če ga v ravnino lahko narišemo tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata (je ravninski) in so pri tem vsa vozlišča na robu zunanega lica.

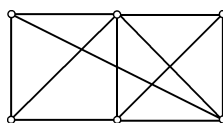
- Pokažite, da je graf G zunanje ravninski natanko tedaj, ko je ravninski graf G' , ki ga dobimo tako, da grafu G dodamo eno vozlišče in ga povežemo s povezavami z vsemi vozlišči grafa G .
- Pokažite, da je graf G zunanje ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije grafov K_4 ali $K_{2,3}$. Uporabite lahko izrek Kuratovskega, ki pravi, da je graf ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizije grafov K_5 ali $K_{3,3}$.
- Pokažite, da graf Q_3 ni zunanje ravninski.

8. Za grafe na spodnji sliki poiščite njihovo kromatično število.



Dodatne naloge

9. Ali je graf s spodnje slike ravninski? Če je ravninski, ga narišite v ravnino tako, da se njegove povezave ne sekajo. Za to vložitev v ravnino poiščite lica in preverite, da velja Eulerjeva formula.



10. Naj bo G ravninski graf, narisani v ravnino tako, da se njegove povezave ne sekajo. Koliko najmanj in koliko največ licem lahko pripada

- (a) povezava,
- (b) vozlišče stopnje $d = 4$?

Narišite ustrezen graf za vsak primer posebej.

11. Pokažite, da grafa $\overline{C_7}$ in $\overline{C_8}$ nista ravninska.

12. Pokažite, da ima ravninski graf z minimalno stopnjo najmanj 5 vsaj 12 vozlišč.

13. Pokažite, da ima ravninski graf brez trikotnikov vsaj dve vozlišči stopnje največ tri.

14. Naj bo $H_{n,m}$ graf šahovskega kralja na šahovnici velikosti $n \times m$ za $n, m \geq 3$ (torej vozlišča so polja šahovnice in dve polji povezani, če se lahko šahovski kralj premakne med polji). Ali je $H_{3,3}$ ravninski graf? Ali je $H_{4,3}$ ravninski graf? Za katere $n, m \geq 3$ je $H_{n,m}$ ravninski graf?