

Izbrana Poglavlja iz Matematike, Prvi kolokvij

4. april 2022

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Poišči največji skupni delitelj $d = \gcd(p, q)$ polinomov $p, q \in \mathbb{Z}_7[x]$,

$$p = x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \text{in} \quad q = 5x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

Nato določi še polinoma $s, t \in \mathbb{Z}_7[x]$, da bo veljalo

$$sp + tq = d.$$

2. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $n = 2^k$. Poišči polinom $p \in \mathbb{Z}_n[x]$ stopnje 2, ki ima n različnih ničel.

b) (10 točk) Ali obstaja kolobar K in polinom $p \in K[x]$, ki ima neskončno različnih ničel?

3. naloga (25 točk)

Naj bo $K = M_2(\mathbb{Z}_5)$ kolobar 2×2 -matrik s koeficienti v $\mathbb{Z}_5$. Koliko obrnljivih elementov vsebuje kolobar K ?

4. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Dokaži, da so vsi ideali v $\mathbb{Z}[i]$ glavni.

b) (10 točk) Kateri od teh idealov so maksimalni? Odgovor utemelji.