LINEARNA ALGEBRA 2021/22
VAJE: linearne preslikave

Sedemnajste vaje

1. $B = \{(1,2,3,4)^T, (-2,1,0,1)^T, (1,0,1,1)^T, (2,-1,0,3)^T\}$ je baza $\mathbb{R}^4$. Izrazi standardno bazo $\mathbb{R}^4$ z B. Menjavo baze zapiši s prehodno matriko.

2. Kdaj je »linearna« funkcija $f(x) = ax + b$ linearna preslikava?

3. Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)(= (1,2,0)) \in \mathbb{R}^3$. Naj bo $A(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$. Preslikavi A določi pripadajočo matriko v standardni bazi.

   Naj bo $\vec{b} \neq 0$ in $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. Pokaži, da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ baza $\mathbb{R}^3$. Preslikavi A določi pripadajočo matriko v tej bazi.

4. Za linearno preslikavo $A\colon U \to V$ pokaži ekvivalenco naslednjih trditev.

   a) A je bijektivna
   b) Za vsako bazo $\{u_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ prostora U je $\{Au_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ baza prostora V.
   c) Obstaja baza $\{u_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ prostora U, za katero je $\{Au_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ baza prostora V.

5. Pokaži, da je preslikava $A\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ podana s predpisom

$$A(p(x)) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$$

   linearna.

   Ali je izomorfizem? Za $n = 2$ preslikavi zapiši pripadajočo matriko v standardni bazi.

Osemnajste vaje

1. Zapiši matriko, ki v standardni bazi pripada zrcaljenju čez premico $y = kx$.

2. Naj bo $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava, ki jo dobimo z zaporedjem preslikav: razteg v smeri $(1,2,0)$ za 2-krat, zrcaljenje čez premico razpeto z $(0,1,1)$ in skrčitvijo celotnega prostora za 2-krat. Preslikavi zapiši pripadajočo matriko v standardni bazi.

3. Naj bo $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki prostor raztegne za 3-krat v smeri $(1,1,1)$ in obrne v pozitivni smeri za $\pi/2$ (Kaj pa za poljuben kot ϕ?) okoli osi $(1,1,1)$. Preslikavi zapiši pripadajočo matriko v standardni bazi.

4. Določi rang in ničelnost linearnih preslikav $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ in $\vec{x} \mapsto (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b}$ v odvisnosti od $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

5. Pokaži, da ima enačba $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ za $\vec{a} \neq 0$ natanko eno rešitev.

6. Poišči bazo jedra in bazo slike preslikave $A \colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ podane z
$$A(p(x)) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x).$$

Devetnajste vaje

1. Pokaži, $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ in $n(AB) \geq \max\{n(A), n(B)\}$.

2. Naj bo matrika A podobna B. Pokaži, da je za vsak polinom p matrika $p(A)$ podobna $p(B)$. Naj bo A ekvivalentna B. Ali je $p(A)$ ekvivalentna $p(B)$?

3. Naj bo A endomorfizem (matrika). Pokaži, da je vsota in presek invariantnih podprostorov preslikave A tudi invarianten prostor.

4. Naj bo $U = V \oplus W$ in P projekcĳi na V vzdolž W. Pokaži Podprostor V je invarianten za preslikavo A natanko tedaj, ko je $PAP = AP$. Podprostora V in W sta oba invariantna za A natanko tedaj, ko je $AP = PA$.

5. Naj matriki (endomorfizem) A in B komutirata. Pokaži, da je $\operatorname{im}(A)$ invarianten za B.

6. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dvajsete vaje

1. Naj bodo $1, 2, 3$ lastne vrednosti in $(2, -1, 1)^T$ lastni vektor za 2 matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}.$$
Določi a, b, c in preostala lastna vektorja. Določi A^{10} (A^k).

2. Naj bo A obrnljiva in $p(t)$ njen karakteristični polinom. Pokaži, da je $\frac{(-t)^n}{\det A} p(1/t)$ karakterističen polinom matrike A^{-1}.

3. Izrazi prosti člen in koeficient pri t^{n-1} karakterističnega polinoma matrike A. Pokaži, da je $\operatorname{tr}(A)$ enak vsoti lastnih vrednosti štetih z alg. večkratnostjo in $\det(A)$ produkt lastnih vrednosti štetih z alg. večkratnostjo.

4. Poišči matriko nad $\mathbb{R}$, ki ni podobna zgornje trikotni matriki nad $\mathbb{R}$.

5. Poišči števila a za katera je matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -a-3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

podobna diagonalni matriki.

Enaindvajsete vaje

1. Naj A in B komutirata. Pokaži, da sta $\mathrm{im}(A)$ in $\ker(A)$ invariantna za B. Pokaži, da so lastni in korenski podprostori preslikave A invariantni za B.

2. Naj B komutira z A. Pokaži, da imata matriki (za vsako lastno vrednost matrike A) vsaj en skupen lastni vektor nad $\mathbb{C}$.

3. Naj ima A same različne lastne vrednosti. Pokaži, da je vsaka matrika, ki komutira z A, diagonalizibilna.

4. Naj bosta A in B podobni diagonalnim matrikam nad $\mathbb{C}$. Pokaži, da je $AB = BA$, natanko tedaj, ko obstaja baza sestavljena iz skupnih lastnih vektorjev.

5. Naj bo $A\colon U \to U$ in V invarianten podprostor. Na bo $B = A|_V\colon V \to V$. Pokaži, da karakteristični/minimalni polinom B deli karakteristični/minimalni polinom A.

   Naj ima $A\colon U \to U$ diagonalizacijo. Pokaži, da ima $A|_V$ diagonalizacijo.

6. Naj bo $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrika za katero velja $A^2 = 0$. Pokaži, da je A podobna $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ neničelna in $A^2 = 0$. Pokaži, da je $\mathrm{im}(A) \subset \ker(A)$ in $1 \leq \mathrm{rang}(A) \leq \frac{n}{2}$.

Dvaindvajsete vaje

1. Naj bo $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrika za katero velja $A^2 = 0$. Pokaži, da je A podobna $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ neničelna in $A^2 = 0$. Pokaži, da je $\mathrm{im}(A) \subset \ker(A)$ in $1 \leq \mathrm{rang}(A) \leq \frac{n}{2}$.

3. Naj bo V vektorski prostor in P neničeln endomorfizem, z minimalnim polinomom $x^2 - x$.

   Pokaži, da je $V = \mathrm{im}\, P \oplus \ker P$.

4. Zapiši vse možne Jordanove forme matrike, če sta karakteristični in minimalni polinom:

   a) $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2, m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

   b) $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4, m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

   c) $p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^3(\lambda - 1), m(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^2$ in ima preslikava 5 LN lastnih vektorjev.

Dvaindvajsete vaje

1. Poišči Jordanovo formo in prehodno matriko za

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Poišči Jordanovo formo in prehodno matriko za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & -7 \\ -3 & 17 & 12 \end{bmatrix}$$

   ter izračunaj $\exp A$.

3. Izračunaj $\sqrt{A}, \sqrt{I+A}, \exp(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Pokaži, da je $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$ skalarni produkt na $M_n(\mathbb{R})$. Pokaži, da so matrične enote ortogonalne. Pokaži, da $\mathrm{tr}(AB)$ ni skalarni produkt.

5. Naj bodo $\{a_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ različna realna števila. Pokaži, da je

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)q(a_i)$$

   skalarni produkt na $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ ne pa tudi na $\mathbb{R}_n[x]$.

   Pokaži, da je množica $\{l_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, kjer je

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

   ortonormirana.

6. Naj bodo $\{a_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ različna kompleksa števila. Pokaži, da je

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)\overline{q(a_i)}$$

skalarni produkt na $\mathbb{C}_{n-1}[x]$ ne pa tudi na $\mathbb{C}_n[x]$.

Pokaži, da je množica $\{l_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, kjer je

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

ortonormirana.