

Nedoločeni integral

1. Izračunaj naslednje nedoločene integrale.

$$(a) \int (x^2 + 1)^3 dx \quad \text{Rešitev: } \frac{x^7}{7} + \frac{3x^5}{5} + x^3 + x + C$$

$$(b) \int \left(\frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + e^x + \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{Rešitev: } \frac{2}{5}x^{5/2} + x - 2\sqrt{x} + e^x + \ln x + C$$

$$(c) \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad \text{Rešitev: } \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$$

$$(d) \int (3^x - 5e^x + 4 \cos x - \operatorname{sh} x) dx \quad \text{Rešitev: } \frac{3^x}{\ln 3} - 5e^x + 4 \sin x - \operatorname{ch} x + C$$

uvredba nove spremenljivke: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

$$(a) \int x(2x + 5)^{10} dx \quad \text{Rešitev: } \frac{(2x+5)^{12}}{48} - \frac{5(2x+5)^{11}}{44} + C$$

$$(b) \int \sin(3x) dx \quad \text{Rešitev: } -\frac{1}{3} \cos(3x) + C$$

$$(c) \int \frac{x}{x^2+1} dx \quad \text{Rešitev: } \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$$

$$(d) \int x e^{-x^2} dx \quad \text{Rešitev: } -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$(e) \int \frac{x}{x^4+1} dx \quad \text{Rešitev: } \frac{\arctan x^2}{2} + C$$

$$(f) \int \frac{dx}{x^2+a^2} \quad \text{Rešitev: } \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$(g) \int \frac{1}{x(\ln x+1)^2} dx \quad \text{Rešitev: } -\frac{1}{\ln x+1} + C$$

$$(h) \int \sin x \cos x dx \quad \text{Rešitev: } \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$(i) \int \tan x dx \quad \text{Rešitev: } -\ln(\cos x) + C$$

$$(j) \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx \quad \text{Rešitev: } \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

$$(k) \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{Rešitev: } \frac{(\arcsin x)^3}{3} + C$$

$$(l) \int \frac{e^x}{e^x+2} dx \quad \text{Rešitev: } \ln(e^x+2) + C$$

$$(m) \int \frac{e^{2x}}{e^x+2} dx \quad \text{Rešitev: } e^x - 2 \ln(e^x+2) + C$$

$$(n) \int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{Rešitev: } \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

$$(o) \int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx \quad \text{Rešitev: } \arcsin(x-1) + C$$

$$(p) \int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx \quad \text{Rešitev: } \arcsin(2x-1) + C$$

$$(q) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{Rešitev: } \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} + a^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

pravilo per partes: $\int u dv = uv - \int v du$

(a) $\int x e^x dx$	Rešitev: $e^x(x - 1) + C$
(b) $\int x^2 e^{-x} dx$	Rešitev: $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$
(c) $\int x^2 \cos \frac{x}{2} dx$	Rešitev: $2(x^2 - 8) \sin \frac{x}{2} + 8x \cos \frac{x}{2} + C$
(d) $\int \ln x dx$	Rešitev: $x \ln x - x + C$
(e) $\int (x^2 - 3) \ln x dx$	Rešitev: $(\frac{x^3}{3} - 3x) \ln x - \frac{x^3}{9} + 3x + C$
(f) $\int \arctan x dx$	Rešitev: $x \arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$
(g) $\int \arcsin x dx$	Rešitev: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
(h) $\int e^{\sqrt{x}} dx$	Rešitev: $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$
(i) $\int e^x \sin x dx$	Rešitev: $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

integriranje racionalnih funkcij

(a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$	Rešitev: $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{x+2}{\sqrt{5}} \right) + C$
(b) $\int \frac{x^2}{x^2+4} dx$	Rešitev: $x - 2 \arctan \frac{x}{2} + C$
(c) $\int \frac{x^2+2}{x^2+2x+2} dx$	Rešitev: $x - \ln(x^2 + 2x + 2) + 2 \arctan(x + 1) + C$
(d) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$	Rešitev: $\frac{1}{2} \ln x - 1 - \frac{1}{2} \ln x + 1 + C$
(e) $\int \frac{x+1}{x^2-x-6} dx$	Rešitev: $\frac{4 \ln x-3 + \ln x+2 }{5} + C$
(f) $\int \frac{x}{x^2-2x+1} dx$	Rešitev: $\ln x - 1 - \frac{1}{x-1} + C$
(g) $\int \frac{x+3}{x^3-x} dx$	Rešitev: $-3 \ln x + \ln(x + 1) + 2 \ln(x - 1) + C$
(h) $\int \frac{dx}{2-5x+4x^2-x^3}$	Rešitev: $\frac{1}{1-x} - \ln(2-x) + \ln(x-1) + C$
(i) $\int \frac{x}{x^4+x^2+1} dx$ <i>namig: popolni kvadrat</i>	Rešitev: $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C$
(j) $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} dx$	Rešitev: $\ln x + \frac{2}{x+1} + C$
(k) $\int \frac{x+4}{x(x^2+4)} dx$	Rešitev: $\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$
(l) $\int \frac{x^2-4}{x(x^2+4)} dx$	Rešitev: $\ln \frac{x^2+4}{ x } + C$
(m) $\int \frac{2x^3+4x^2-2x+6}{(x^2-1)(x^2+4)} dx$	Rešitev: $\ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + \ln(x^2 + 4) + \arctan \frac{x}{2} + C$
(n) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} dx$	Rešitev: $\ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x + 1) + C$

integriranje kotnih funkcij

(a) $\int \cos^2 x dx$	Rešitev: $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$
------------------------	---

(b) $\int \sin^3 x dx$	Rešitev: $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$
(c) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$	Rešitev: $-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$
(d) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$	Rešitev: $\frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin(4x) + C$
(e) $\int \cos^4 x dx$	Rešitev: $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) + C$
(f) $\int \cos^5 x dx$	Rešitev: $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$
(g) $\int \sin(3x) \cos(5x) dx$	Rešitev: $\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{16} \cos(8x) + C$
(h) $\int \cos^2(2x) \sin(5x) dx$	Rešitev: $-\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{36} \cos(9x) + C$

Integrale oblike

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

kjer je R racionalna funkcija, lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke

$$\tan \frac{x}{2} = t.$$

Pri substituciji upoštevamo

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

(i) $\int \frac{dx}{\sin x}$	Rešitev: $\ln \left \tan \frac{x}{2} \right + C$
(j) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$	Rešitev: $\ln \left 1 + \tan \frac{x}{2} \right + C$
(k) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$	Rešitev: $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + C$

Integrale oblike

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x + c},$$

kjer je R racionalna funkcija, lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke

$$\tan x = t.$$

Pri substituciji upoštevamo

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

(l) $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x + 3}$	Rešitev: $\frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \tan x \right) + C$
---	---

integriranje korenskih funkcij

- (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})}$ Rešitev: $4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} - 12\ln(\sqrt[12]{x}+1) + C$
- (b) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ Rešitev: $4\sqrt[4]{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1| - 4\arctan\sqrt[4]{x} + C$
- (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ Rešitev: $\arcsin \frac{x-1}{2} + C$
- (d) $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}dx$ Rešitev: $\frac{3}{5}(x-3)^{5/3} + \frac{15}{2}(x-3)^{2/3} + C$
- (e) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ Rešitev: $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + C$
- (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ Rešitev: $\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$
- (g) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}$ Rešitev: $\ln(x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}) + C$

Eulerjev nastavek

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kjer je p polinom in q je polinom eno stopnjo nižji kot p . Polinom q in konstanto A določimo tako, da odvajamo obe strani.

- (h) $\int \frac{x^2+4x+6}{\sqrt{4-x^2}}dx$ Rešitev: $\left(-\frac{1}{2}x-4\right)\sqrt{4-x^2} + 8\arcsin \frac{x}{2} + C$

2. Izračunaj integrale

- (a) $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$ Rešitev: $\frac{1}{4}\arctan(x^4) + C$
- (b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$ Rešitev: $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$
- (c) $\int \frac{dx}{e^x+3}$ Rešitev: $\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\ln|e^x+3| + C$
- (d) $\int \ln^2 x dx$ Rešitev: $2x - 2x\ln x + x\ln^2 x + C$
- (e) $\int e^{\sin x} \sin 2x dx$ Rešitev: $2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$
- (f) $\int \sqrt{x^2+2x+2}dx$ Rešitev: $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C$