

Analiza 1

3. kolokvij

15. 4. 2022

1. naloga (20 točk)

- N** Vsak polinom doseže svoj globalni maksimum na intervalu $(0, 1)$.
- P** Naj bo $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivna zvezna funkcija. Potem obstaja naraščajoča odvedljiva funkcija $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo $F'(x) = f(x)$ za $x \in (a, b)$.
- P** Funkcija $f(x) = |x|$ je integrabilna na intervalu $[-1, 1]$.
- N** Predpis $y + \ln(xy + 1) = 0$ podaja krivuljo, katere tangenta je v točki $(x, y) = (0, 1)$ vzporedna z abscisno osjo.
- P** Če velja $\int_0^1 f(x) = 1$, velja tudi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{3}{2n}\right) + \dots + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \right) = 1$.
- P** Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija z lastnostjo $f''(0) > 0$. Potem obstaja $h > 0$, da graf funkcije f na intervalu $(-h, h)$ leži pod premico skozi točki $(-h, f(-h))$ in $(h, f(h))$.
- N** Obstaja funkcija f z lastnostma $f(0) = 1$ in $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} = 1$, ki ni zvezna v izhodišču.
- PN** Če je ravninska krivulja v polarnih koordinatah podana s predpisom, ki zadošča pogoju $r(\phi) = r(-\phi)$ za $\phi \in [0, \pi]$, je njen graf simetričen glede na os x .
- N** Naj bosta f in g zvezno odvedljivi funkciji na $\mathbb{R}$. Če obstaja limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obstaja tudi limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- P** Naj bo $h \in \mathbb{R}$ število z majhno absolutno vrednostjo. Linearni približek za e^h je $1 + h$.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (20 točk)

Podana je krivulja v implicitni obliki

$$x^4 - 2x^2y + y^4 = 0.$$

Z nastavkom $y = tx$ poišči parametrizacijo krivulje in jo skiciraj. V ta namen izračunaj tudi stacionarne točke koordinatnih funkcij in naklonske kote, pod katerimi krivulja pride v izhodišče.

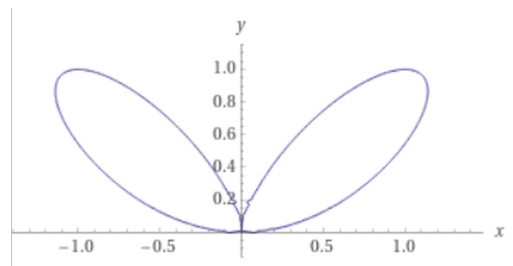
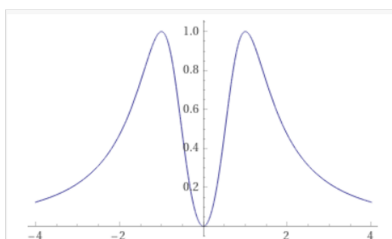
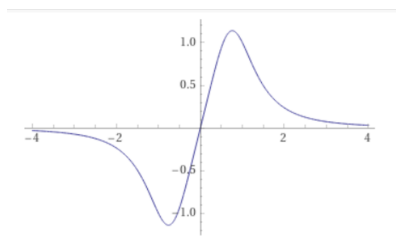
Rešitev: Ko v enačbo vstavimo nastavek $y = tx$, dobimo parametrizacijo

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{2t^2}{1+t^4}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Odvod prve funkcije je ničeln pri $t = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, ki ustreza točkama $\left(\pm\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$. Druga koordinatna funkcija stacionarne točke doseže pri vrednostih $t = 0$ in $t = \pm 1$. Te ustrezajo točkam $(0, 0)$ in $(\pm 1, 1)$. Nadalje za koeficient tangente velja

$$k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4t - 4t^5}{2 - 6t^4}.$$

Krivulja v izhodišče pride pri $t = 0$ in ko gre $t \rightarrow \pm\infty$. Pri teh vrednostih je $k = 0$ oz. gre $k \rightarrow \pm\infty$. Ko vse te informacije združimo dobimo spodnji skici grafov koordinatnih krivulj in grafa implicitno podane krivulje. Pri slednjem je pomembno, da so označene ekstremne točke in da krivulja v izhodišče pride vzporedno oz. pravokotno glede na abscisno os.



Točkovnik:

- +2 Parametrizacija.
- +8 Stacionarne točke za x in y .
- +5 Naklonski koti.
- +5 Skica krivulje.

3. naloga (20 točk)

Izračunaj nedoločena integrala:

$$\int \sqrt{x^2 - 6x + 13} \, dx \quad \text{in} \quad \int \frac{\arctan x}{x^3} \, dx.$$

Rešitev: Pri prvem integralu izraz pod korenem najprej preoblikujemo:

$$\int \sqrt{x^2 - 6x + 13} \, dx = \int \sqrt{(x-3)^2 + 4} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1} \, dx.$$

Nato za novo spremenljivko vpeljemo $t = \frac{x-3}{2}$ ter $t = \operatorname{sh}s$. Dobimo

$$2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1} \, dx = 4 \int \sqrt{t^2 + 1} \, dt = 4 \int \operatorname{ch}^2 s \, ds = \int (e^{2s} + e^{-2s} + 1) \, ds.$$

Sedaj je integracija preprosta:

$$\int (e^{2s} + e^{-2s} + 1) \, ds = \frac{1}{2}e^{2s} - \frac{1}{2}e^{-2s} + s + C = \operatorname{sh} \left(2 \cdot \operatorname{arsh} \left(\frac{x-3}{2} \right) \right) + \operatorname{arsh} \left(\frac{x-3}{2} \right) + C.$$

Pri drugem integralu najprej uporabimo integracijo po delih za $u = \arctan x$ in $dv = x^{-3}dx$:

$$\int \frac{\arctan x}{x^3} \, dx = \frac{-\arctan x}{2x^2} + \int \frac{dx}{2x^2(1+x^2)}.$$

Nato uporabimo standardni nastavek za integracijo racionalnih funkcij:

$$\int \frac{dx}{2x^2(1+x^2)} = A \ln|x| + \frac{B}{x} + C \ln|x^2+1| + D \arctan x + E.$$

Ker je začetni integrand sod, sklepamo, da bo njegov nedoločeni integral lih. Torej mora veljati $A = C = 0$. Preostali konstanti določimo z odvajanjem. Dobimo $B = -D = \frac{1}{2}$.

Opomba: V prvem primeru ste nekateri vpeljali substitucijo $\sqrt{x^2 - 6x + 13} = x - u$, ki se nadalje preoblikuje v $x = \frac{1}{2} \frac{u^2 - 13}{u - 3}$. Ta način reševanja je legitimen, a bistveno daljši, saj v naslednjem koraku dobimo integral racionalne funkcije, v katerem sta števec in imenovalac polinoma četrte oz. tretje stopnje. Podobno zapletena, a vseeno dopustna je bila ideja, v kateri integral iracionalne funkcije računamo z nastavkom

$$\int \sqrt{x^2 - 6x + 13} \, dx = \int \frac{(x^2 - 6x + 13)}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} \, dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \int \frac{C}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} \, dx.$$

Ta je znova zahtevnejša od osnovne rešitve, saj moramo najprej določiti tri konstante, nato pa preostali integral s preoblikovanjem na popolni kvadrat prevesti do inverza hiperbolične funkcije.

Točkovnik:

- +4 Popolni kvadrat in vpeljava spremenljivke t .
- +6 Uporaba in ustrezna integracija hiperboličnih funkcij.
- +4 Integracija po delih.
- +6 Integral racionalne funkcije.

4. naloga (15 točk)

Naj bo K krožnica polmera 1, ki poteka skozi izhodišče $O(0,0)$ koordinatnega sistema in seka abscisno os v točki $X(x_0, 0)$ ter ordinatno os v točki $Y(0, y_0)$, kjer sta $x_0 > 0$ in $y_0 > 0$. Med vsemi takimi krožnicami poišči tisto, ki določa trikotnik $\triangle OXY$ z največjo možno ploščino. Svoj odgovor dobro utemelji!

Rešitev: Trikotnik $\triangle OXY$ je pravokoten, zato mora njegova hipotenuza potekati skozi središče krožnice in imeti dolžino 2 (Talesov izrek). Velja torej zveza

$$x_0^2 + y_0^2 = 4.$$

Iz te zveze izrazimo spremenljivko y in problem preoblikujemo v iskanje globalnega ekstrema funkcije

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} \text{ za } x \in [0, 2].$$

Pri tem smo upoštevali, da nobena izmed stranic trikotnika ne more biti daljša od dveh enot. Ker velja $S(0) = S(2) = 0$, je ekstrem dosežen v stacionarni točki $x = \sqrt{2}$, pripadajoča vrednost za koordinato y pa je ista. To pomeni, da se središče krožnice nahaja v točki $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Alternativni način, kako rešiti to nalogo brez Talesovega izreka je sledeč. Denimo, da je središče krožnice v točki $S(a, b)$. Torej je njena enačba enaka:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1.$$

Točke, skozi katere poteka, nam podajo tri enačbe:

$$(x_0 - a)^2 + b^2 = 1,$$

$$a^2 + (y_0 - b)^2 = 1,$$

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Od tod izrazimo $x_0 = 2a$ in $y_0 = 2b$ oziroma $x_0^2 + y_0^2 = 4$. To je natanko zveza, iz katere smo izhajali zgoraj, lahko pa ploščino izrazimo tudi v odvisnosti od središča krožnice

$$S = \frac{1}{2}x_0y_0 = 2a\sqrt{1-a^2}, a \in [0, 1].$$

Še ena možna rešitev sledi iz opazke, da mora biti središče krožnice iz našega problema od izhodišča vselej oddaljeno za eno enoto. Torej lahko vse njegove lege opišemo s s pomočjo kotnih funkcij: $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Na tem intervalu je maksimum funkcije

$$S(\varphi) = \frac{x_0y_0}{2} = 2 \cos \varphi \sin \varphi = \sin(2\varphi),$$

dosežen pri $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Opomba: Nekateri izmed vas ste našli tudi rešitev, pri kateri uporaba odvoda ni potrebna. In sicer, po zvezi med aritmetično in geometrijsko sredino dveh števil velja

$$S = \frac{x_0y_0}{2} \leq \frac{x_0^2 + y_0^2}{4}.$$

V našem primeru je desna stran te neenakosti enaka 1, maksimum pa je dosežen natanko tedaj, ko je $x_0 = y_0 = \sqrt{2}$.

Točkovnik:

+6 Zveza med x_0 in y_0 .

+6 Iskanje ekstrema ustrezne funkcije (vključena mora biti obravnava krajišč).

+3 Zapis koordinat središča krožnice oz. opis njene lege.

5. naloga (10 točk)

Naj bodo $a_0, \dots, a_n$ realna števila, ki zadoščajo pogoju

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Dokaži, da ima polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ vsaj eno ničlo na intervalu $(0, 1)$.

Rešitev: Ena od možnih primitivnih funkcija danega polinoma je

$$P(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x.$$

Opazimo, da zanjo velja $P(0) = 0$ in

$$P(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Po Rollovem izreku obstaja $c \in (0, 1)$, da je $P'(c) = p(c) = 0$.

Opomba: Alternativa zgornje rešitve je uporaba določenega integrala. Velja

$$\int_0^1 p(x) dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

V kolikor p ni ničeln od tod sledi, da mora na intervalu $(0, 1)$ vsaj enkrat spremeniti predznak, saj bi bila sicer ploščina pod njim bodisi strogo pozitivna bodisi strogo negativna.

Opomba: Med vašimi rešitvami je bilo tudi nekaj neuspešnih poskusov popolne indukcije. Ključna napaka v le teh je bila v predpostavki, da velja zveza $p_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + p_n(x)$, pri kateri polinoma p_{n+1} in p_n zadoščata predpostavkam naloge. To ni res!

Točkovnik:

+5 Uporaba primitivne funkcije.

+5 Uporaba Rollovega izreka.

6. naloga (15 točk)

Poišči primer funkcije, ki je zvezno odvedljiva na okolici intervala $[1, \infty)$ in zadošča pogoju

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ in } \lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x) = 0.$$

Pokaži, da je produkt dveh takih funkcij vedno enakomerno zvezen na $[1, \infty)$.

Nasvet: Pomagaj si z L'Hospitalovim pravilom.

Rešitev: Upoštevamo nasvet in ugotovimo, da za funkcijo z opisanimi lastnostmi velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f'(x) = 0.$$

Njena rast mora torej biti šibkejša od logaritemske. Ustrezni primeri so na primer

$$f(x) = \ln^\alpha x, \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$f(x) = \ln(\ln(x + c)), \quad c > 0,$$

$$f(x) = \ln(c + \ln x), \quad c > 0.$$

Omejitev $c > 0$ izvira iz dejstva, da mora biti f zvezna na okolici intervala $[1, \infty)$.

Naj bosta sedaj f in g dve taki funkciji. Odvod njunega produkta je zvezen, velja pa tudi

$$|(f \cdot g)'(x)| = |f'(x)g(x) + f(x)g'(x)| \leq \left| \frac{\ln x}{x} \right| \left(|x f'(x)| \left| \frac{g(x)}{\ln x} \right| + \left| \frac{f(x)}{\ln x} \right| |x g'(x)| \right).$$

Vse funkcije, ki se pojavijo v absolutnih vrednostih, so zvezne na $[1, \infty)$, zaradi ustreznih limitnih pogojev pa so tudi omejene. Torej obstaja konstanta $M > 0$, da je $|(f \cdot g)'(x)| < M$ na $[1, \infty)$. Po Lagrangeovem izreku to zadošča za enakomerno zveznost produkta $f \cdot g$.

Opomba: Nekajkrat sem zasledil argument, da je produkt dveh enakomerno zveznih funkcij znova enakomerno zvezen na $[1, \infty)$. To ne drži! Protiprimer sta funkciji $f(x) = g(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Točkovnik:

+6 Primer funkcije.

+9 Dokaz enakomerne zveznosti.