

1. Imejmo množico $\{a, b, c\}$ in operacijo $*$. Na koliko načinov lahko dopolniš spodnjo Cayleyevo tabelo, da bo $(A, *)$ monoid.

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	$?$	$?$	b
c	a	$?$	$?$

2. Analiziraj naslednje strukture:

- $(\mathbb{N}, *)$, kjer je $a * b = a^b$.
- $(\mathbb{N}, *)$, kjer je $a * b = \gcd\{a, b\}$.
- $(\mathbb{N}_0, *)$, kjer je $a * b = \max\{a, b\}$.
- $(\mathbb{N}_0, *)$, kjer je $a * b = \min\{a, b\}$.
- $(\mathbb{R}_0, *)$, kjer je $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Naj bo A množica vseh mogočih grafov na množici vozlišč $V = \{0, 1, 2, n-1\}$. Definiramo množenje grafov $G_1 * G_2$ kot graf z vozlišči V , v katerem sta poljubni vozlišči u in v sosedni, če sta sosedni v natanko enem izmed G_1 in G_2 . Kakšna algebrska struktura je $(A, *)$? Naj bo $B \subset A$ množica vseh grafov s sodimi stopnjami. Ali je B zaprta za operacijo $*$?

4. Na množici $F = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\}$ je definirana operacija komponiranja funkcij. Kakšna struktura je $(F, \circ)$? Na F definirajmo funkcijo f

$$f : n \mapsto 2n$$

Poišči leve in desne inverze f .

5. Naj bo $M = (\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoid. Označimo z $\mathbb{Z}_n^*$ množico vseh obrnljivih elementov v M . Dokaži, da je $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ grupa. Koliko elementov ima $\mathbb{Z}_n^*$?

6. Koliko elementov ima grupa $(\mathbb{Z}_{81}^*, \cdot)$? Ali je 17 element $\mathbb{Z}_{81}^*$? Če je, izračunajte njegov inverz.

7. Koliko elementov ima grupa $(\mathbb{Z}_{72}^*, \cdot)$? Ali je 53 element $\mathbb{Z}_{72}^*$? Če je, izračunajte njegov inverz.

8. Naj bo $G = (\mathbb{Z}_n, +)$ grupa in $x \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq 0$. Koliko je red elementa x ? Kakšna je moč najmanjše podgrupe v G , ki vsebuje x ?

9. Ali je množica matrik

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} ; a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\}$$

z operacijo množenja matrik grupa?

10.

- Naj v grupi G velja $a^6 = b^3 = e$ in $a^5b^2 = b^2a^5$, za neka elementa a, b v G . Dokaži, da a in b komutirata.
- Naj bo G grupa, v kateri je vsak element enak svojemu inverzu. Pokažite, da je potem G abelova grupa.

Dodatne naloge

11. Sestavi Caylejevo tabelo poljubne operacije $*$, ki je komutativna, ni pa asociativna.

12. Na množici $\mathbb{R}$ je definirana operacija $*$ s predpisom

$$a * b = 3(a + 1)(b + 1) - ab.$$

Ali je operacija komutativna? Ali je operacija asociativna? Ali obstaja enota? Ali ima vsak element inverz? Kakšna struktura je $(\mathbb{R}, *)$?

13. Naj bosta G_1, G_2 grafa in naj bo $G_1 \circ G_2$ graf, ki ga dobimo tako, da povežemo vsa vozlišča G_1 z vsemi vozlišč grafa G_2 . Naj bo A množica vseh končnih grafov. Ali je $(A, \circ)$ polgrupa?

14. Pokažite, da je $GL(\mathbb{Z}_3, 2)$ grupa (z operacijo množenja matrik po modulu 3); v grupi so torej vse obrnljive matrike velikosti 2×2 s koeficienti iz $\mathbb{Z}_3$. Poišči kak element reda 2 in reda 3 v $GL(\mathbb{Z}_3, 2)$. Poišči center $Z(GL(\mathbb{Z}_3, 2))$.