

Prvi kolokvij. Matematična orodja v fiziki. 15.4.2022

Čas pisanja: 90 minut

1. Naloga

V CERNu v Švici med drugim producirajo eksotične delce kaone. Kaoni imajo v lastnem sistemu življenjski čas $\tau = 5.1 \cdot 10^{-8}$ s. Želijo jih trčiti v 100 m oddaljeno tarčo. Kako hitro morajo poslati kaone, da pridejo do tarče?

2. Naloga

Košček ledu z maso 80 g, spustimo po $l = 5$ m dolgi strehi z naklonom $\varphi = 20^\circ$ in koeficientom trenja $k_t = 0.1$. Kolikšno hitrost ima ko pride do roba strehe? Na kolikšni vodoravni razdalji od strehe pade na tla, če je ta $h = 4$ m nad tlemi?

3. Naloga

Mednarodna vesoljska postaja kroži 410 km nad Zemljo. Polmer zemlje je $R_z = 6400$ km, masa Zemlje $M_z = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

- Kolikšen a je gravitacijska sila na vesoljsko postajo, če tehta 450 ton?
- S kolikšno hitrostjo se giblje?
- Astronavti izstrelijo izstrelak nazaj v smeri gibanja, tako da je izstrelak še vedno na isti višini, ampak ne kroži ($\omega = 0/s$). Izstrelak zato začne padati proti Zemlji. Kako se spreminja višina izstrelka s časom?

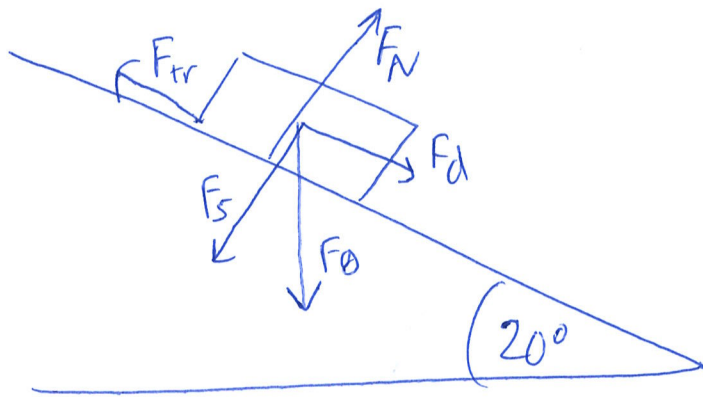
4. Naloga

V vesolju, daleč od drugih teles, imamo vesoljsko postajo z maso $M=1000t$ in obliko tankega diska s premerom $L = 100m$. Na osi palice je 50m stran od palice točkast astronom z maso $m=100kg$. Kolikšna je gravitacijska sila med vesoljsko postajo in astronomom?

Vsaka naloga je vredna 1 točko. 3 točke so 100%.

1) Sile na klancu

$$\oplus = \frac{1}{8}$$



Zveze med silami

$$F_s = F_g \cos 20^\circ = F_N$$

$$F_d = F_g \sin 20^\circ$$

$$F_{tr} = k_{tr} F_N$$

\oplus

$$\Sigma F = ma = F_d - F_{tr}$$

$$a = g (\sin 20^\circ - k_{tr} \cos 20^\circ)$$

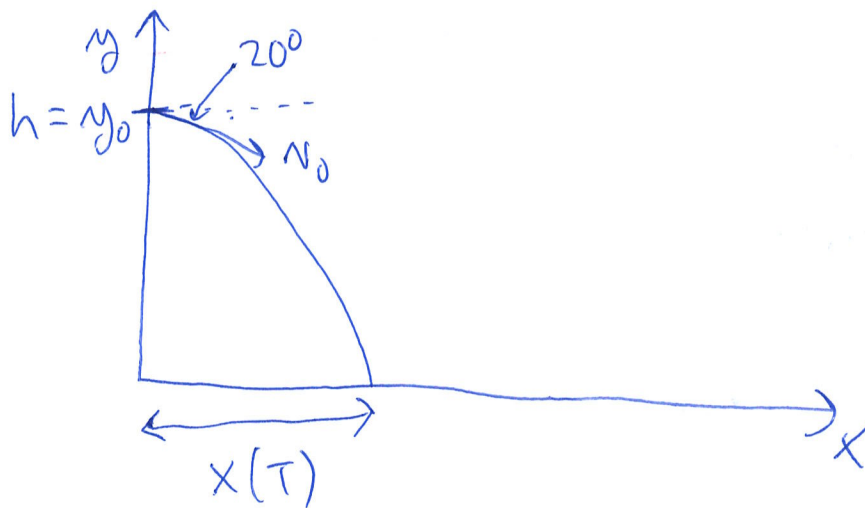
$$a = 2,48 \frac{m}{s^2} \quad \frac{1}{4}$$

Enakomerno pospešeno gibanje

$$s = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 2,2s \quad \oplus$$

$$v = a \cdot t = 5,45 \frac{m}{s} \quad \oplus$$

1) Poševni met



$$x: x(t) = v_0 \cos 20^\circ \cdot t$$

$$y: y(t) = h - v_0 \sin 20^\circ t - \frac{gt^2}{2} \quad (+)$$

Pomemben predznak.

Iščemo T ko $y(T) = 0$.

$$T_{1,2} = \frac{v_0 \sin 20^\circ \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 20^\circ + 4 \frac{g}{2} y_0}}{-g}$$

$$T_1 = -0,99s$$

$$T_2 = 0,81s \quad (+)$$

$$x(T_2) = v_0 \cos 20^\circ T_2 = 2,06m$$

② Naloga se lahko lotimo na različne načine.

Tu je predstavljeno podaljšanje časa za kaone.

Druge možnost je skrajšitev laboratorijske dolžine v sistemu kaonov.

$$\tau = 5,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$l = 700 \text{ m}$$

$$l = \frac{l}{\gamma} \quad \tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \tau \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{l}{\tau c} \sqrt{1-\beta^2}$$

$$\beta^2 = \left(\frac{l}{\tau c}\right)^2 (1-\beta^2)$$

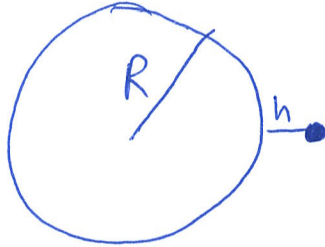
$$\beta^2 \left(1 + \left(\frac{l}{\tau c}\right)^2\right) = \left(\frac{l}{\tau c}\right)^2$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{\tau c}\right)^2}{1 + \left(\frac{l}{\tau c}\right)^2}} = \frac{1}{4}$$

$$\beta = 0,988 c \quad \frac{1}{4}$$

$$v = 296,5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\textcircled{3} \text{ a) } F_g = -G \frac{mM}{\underbrace{(R+h)^2}_{\text{Pomenbno}}} = -3,88 \cdot 10^6 \text{ N} \quad \frac{7}{4}$$



b) Ker kroži velja $a_r \overset{\oplus}{=} \frac{v^2}{r} = v\omega = \omega^2 r$, $r = R+h$

Velja tudi 2. Newtonov zakon $F = m \cdot a$

in gravitacija $F = -G \frac{mM}{(R+h)^2} \overset{\oplus}{\quad}$

Enačimo

$$a_r = \frac{v^2}{r} = G \frac{M}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = 7,67 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad \oplus$$

3 c

$$W_{\text{končna}} = - \frac{GmM}{(R+h_k)} + \frac{m v_k^2}{2} \quad h_k = 408 \text{ km}$$

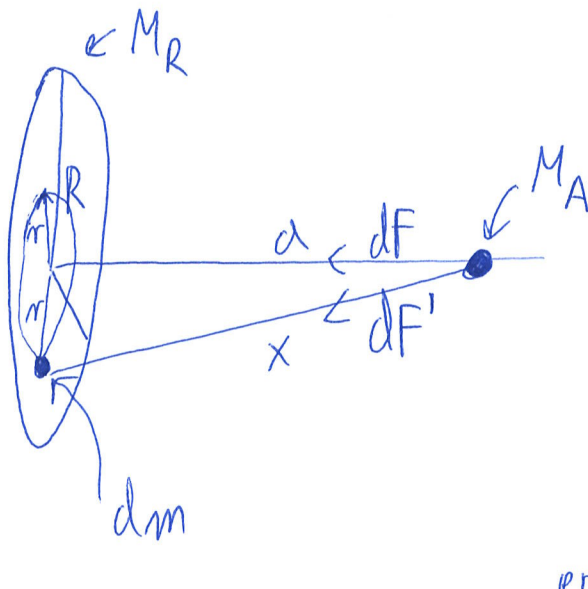
$$W_{\text{začetna}} = - G \frac{mM}{R+h_z} + \frac{m v_z^2}{2} \quad h_z = 470 \text{ km}$$

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad \Delta A = W_k - W_z$$

$$\Delta t = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$$

$$P = \frac{7,77 \cdot 10^{12} \text{ J}}{\Delta t} = 2,46 \cdot 10^5 \text{ W}$$

4



$$\cos \varphi = \frac{a}{x}$$

$$x = \sqrt{a^2 + r^2}$$

projekcija sile dF' na os (dF)

$$dF = -G \frac{M_A dm}{x^2} \cos \varphi \quad (+)$$

gostota: $\rho = \frac{M_R}{\pi R^2 L} \quad (+)$

$$dm = \rho \cdot 2\pi r dr \quad (+)$$

$$\int dF = -G M_A \rho 2\pi a \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (+)$$

Nova spremenljivka

$$u = r^2 + a^2 \quad (+)$$

$$du = 2r dr$$

$$F = -G M_A \rho 2\pi a \int_{a^2}^{R^2 + a^2} \frac{1}{2} u^{-3/2} du \quad (+)$$

$$F = -\frac{G M_A M_R \pi a}{\pi R^2} \left(-\frac{2}{1} \right) u^{-1/2} \Big|_{a^2}^{a^2 + R^2} \quad (+)$$

$$F = -\frac{2 G M_A M_R a}{R^2} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2 G M_A M_R}{R^2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \quad (+)$$

$= \cos \varphi$