

Neskončna družina kriterijev deljivosti

Barbara Bone in Lucija Bogataj
Sodobni trendi v izobraževanju matematike

22. 4. 2022

Pisno gradivo in učna ura o neskončni družini kriterijev deljivosti te bo pripeljala do postopka, kako lahko kar sam iznajdeš kriterij za preverjanje deljivosti naravnega števila z nekim drugim naravnim številom. O nekaterih kriterijih deljivosti že veliko veš iz osnovne in srednje šole, zato te za začetek v spletni učilnici čaka kviz, ki te bo vodil skozi ponovitev.

Števila, ki so tuja 10

Ugotovili smo, da je za deljivost števila n s potencami števil 2 in 5, npr. 2^i ali 5^i , dovolj preverjati le deljivost i -mestnega konca števila n z 2^i ali 5^i . Vsa števila, ki v prafaktorskem razcepu ne vsebujejo niti faktorja 2 niti 5, pa so tuja številu 10. To so natanko tista števila, ki imajo enice v množici $\{1, 3, 7, 9\}$. Za izdelavo kriterijev deljivosti z naravnim številom p , ki se konča na 1, 3, 7 ali 9, bomo potrebovali najmanjši taki naravni števili j in k , da bo veljalo

$$pj = 10k \pm 1.$$

Primer 1 *Zanima nas kriterij za deljivost s 37. Zapišemo*

$$37 \cdot 3 = 111 = 10 \cdot 11 + 1,$$

saj $1 \cdot 37$ ni od najbližjega večkratnika števila 10, tj. 40, oddaljena za 1, ampak za 3. Prav tako je $2 \cdot 37 = 72$ od 70 oddaljena za 2, kar ni 1. Za 37 torej dobimo $j = 3$ in $k = 11$, predznak pa +.

Kriterij deljivosti z rezanjem enice

Postopek za preverjanje deljivosti si natančno preberi, nato pa si oglej video, kako ta postopek deluje na konkretnem primeru.

Naj bo n naravno število in p število, za katerega je $\gcd(p, 10) = 1$.

- Če se p konča na 1 ali 9, poišči tako število k , da bo $p = 10k \pm 1$.
 - Če se p konča na 3 ali 7, poišči tako število k , da bo $3p = 10k \pm 1$.
- Od števila $n = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ odreži enico, tako da dobiš $\overline{a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1}$, kar je enako $\frac{n-a_0}{10}$.
- Izračunaj $\frac{n-a_0}{10} \mp ka_0$.
- Če $p \mid \frac{n-a_0}{10} \mp ka_0$, potem tudi $p \mid n$. Če $p \nmid \frac{n-a_0}{10} \mp ka_0$, potem tudi $p \nmid n$.
- Če še ne vidiš, ali p deli $\frac{n-a_0}{10} \mp ka_0$, potem ponavljaj korake 2 – 4 na $n_1 = \frac{n-a_0}{10} \mp ka_0$, $n_2 = \frac{n_1-a_1}{10} \mp ka_1$, ... Če v nekem koraku dobiš negativno število, ga za naslednji korak pomnoži z -1 .

Primer 2 Ugotovi, ali 37 deli 2035.

$$3 \cdot 37 = 111 = 10 \cdot 11 + 1 \implies k = 11$$

Od 2035 odrežemo enico 5 in dobimo 203. Izračunamo $203 - 11 \cdot 5 = 148$. Nadaljujemo postopek. Od 148 odrežemo 8 in dobimo 14. Izračunamo $14 - 11 \cdot 8 = -74$. Od 74 odrežemo 4 in izračunamo $7 - 11 \cdot 4 = -37$. Iz tega vemo, da $37 \mid 2035$.

Oglej si video, nato sam reši spodnjo nalogo.

Naloga 1 Ali je število 16762 deljivo s 17?

Zakaj zgornji postopek deluje

Vsako naravno število p , ki je tuje 10, lahko zapišemo kot $pj = 10k \pm 1$ za neki naravni števili j in k . Najmanjši možni j za števila z enico enako 1 ali 9, je 1. Za števila z enico 3 ali 7 je najmanjši možni j enak 3, saj je $3 \cdot 3 = 9 = 10 - 1$ in $3 \cdot 7 = 21 = 10 \cdot 2 + 1$. Najmanjši možni j in njemu pripadajoči predznak je odvisen le od enice števila p , vrednosti so prikazane v tabeli 1.

Enica števila p	j	vrstica pri predznaku $\pm$ in $\mp$
1	1	zgornja
3	3	spodnja
7	3	zgornja
9	1	spodnja

Tabela 1: Tabela najmanjših možnih j in predznakov glede na enice števila p .

Naravno število $n = \overline{a_s a_{s-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ zapišemo v desetiški bazi kot

$$a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + a_0.$$

Izraz nekoliko preurejamo. Sam razmisli, da sta tretja in četrta vrstica zares enaki, ne glede na to, ali vzamemo zgornje predznake ali spodnje. V 5. vrstici upoštevamo $pj = 10k \pm 1$:

$$\begin{aligned}
n &= a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + a_0 \\
&= a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + \mathbf{10ka_0} - \mathbf{10ka_0} + a_0 \\
&= a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + a_0(10k - 10k + 1) \\
&= a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + a_0(\pm(10k \pm 1) \mp 10k) \\
&= a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 + a_0(\pm pj \mp 10k) \\
&= a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \dots + a_1 10 \pm pja_0 \mp 10ka_0 \\
&= 10 \cdot (a_s 10^{s-1} + a_{s-1} 10^{s-2} + \dots + a_1 \mp ka_0) \pm pja_0 \\
&= 10 \cdot \left(\frac{n - a_0}{10} \mp ka_0 \right) \pm pja_0
\end{aligned}$$

Zdaj imamo n zapisan kot vsoto dveh števil. Desni je enak $\pm pja_0$, zato je deljiv s p . Velja $\gcd(p, 10) = 1$, zato sledi

$$p \mid n \iff p \mid \frac{n - a_0}{10} \mp ka_0.$$

Ko postopek nadaljujemo, moramo za $n_1, n_2 \dots$ imeti pozitivna števila. V nasprotnem primeru z odštevanjem enic in deljenjem z 10 ne režemo stran enic.

Dokazali smo izrek:

Izrek 1 *Naj bosta n in p naravni števili, $\gcd(p, 10) = 1$. Naj bosta j in k najmanjši možni naravni števili, za kateri velja $pj = 10k \pm 1$. Potem je*

$$p \mid n \iff p \mid \frac{n - a_0}{10} \mp ka_0.$$

Posplošitev kriterija na neskončno družino kriterijev

Do sedaj smo v izrazu $pj = 10k \pm 1$ vedno izbrali najmanjše možno naravno število j , kar je tudi pomenilo najmanjše možno naravno število k . Vendar imata znotraj celih števil linearni Diofantski enačbi $px = 10y + 1$ in $px = 10y - 1$ vsaka neskončno mnogo rešitev. Med seboj sta enačbi povezani: če (j, k) reši eno od enačb, potem $(-j, -k)$ reši drugo. Ko poznamo eno rešitev (j, k) za $px = 10y + 1$, ostale najdemo kot

$$px = 10y + 1 \iff x = j + 10t, y = k + pt, t \in \mathbb{Z}.$$

Sledi, da vsak par $(x, y) = (\pm j + 10t, \pm k + pt)$ ustreza eni od enačb $px = 10y + 1$ in $px = 10y - 1$. Od tod dobimo

$$n = 10 \cdot \left(\frac{n - a_0}{10} \mp ya_0 \right) \pm pxa_0,$$

zato

$$p \mid n \iff p \mid \frac{n - a_0}{10} \mp ya_0; \quad y \in \pm k + pt.$$

Mogoče se je prepričati, da na tak način pridobimo vse možne različne kriterije deljivosti, ki delujejo na način rezanja zadnje števke stran in prištevanja ali odštevanja njenega večkratnika. Dokaz bomo izpustili, če te zanima, lahko razmisliš sam ali na učni uri prosiš za dodatno gradivo.

Primer 3 *Konstruirajmo neskončno možnih kriterijev za deljivost s 7. Velja*

$$3 \cdot 7 = 10 \cdot 2 + 1,$$

zato je $(j, k) = (3, 2)$. Množica možnih y je

$$y = \pm 2 + 7t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Potem deljivost lahko prevrejšemo tako, da

- od n odrežemo zadnjo števko, nato od $\frac{n-a_0}{10}$ odštejemo $a_0 \cdot y$,
 $y \in \{\dots, -12, -5, 2, 9, \dots\}$, ali
- od n odrežemo zadnjo števko, nato k $\frac{n-a_0}{10}$ prištejemo $a_0 \cdot y$,
 $y \in \{\dots, -9, -2, 5, 12, \dots\}$.

Naloga 2 *Ali 7 deli število 216307? Prepričaj se, da enak rezultat dobiš z uporabo $y = k = 2$ in $y = -k + 1 \cdot p = -2 + 7 = 5$. Pazi, v katerem primeru odštevaš in v katerem prištevaš.*

Naloga 3 *Poišči množico možnih y za kriterij deljivosti s 13.*

Literatura

Darrin Frey and Adam Hammett. An infinite family of divisibility tests. *The College Mathematics Journal*, 52(1):2–10, 2021. doi:10. 1080/07468342. 2021. 1845530.