

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka
1. naloga (25 točk)

a) Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \ln(1 + \sqrt{x}) \, dx.$$

b) Določi konstanto $a \in \mathbb{R}$, da nedoločeni integral

$$\int \frac{2x^3 - ax^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2} \, dx$$

ne bo vseboval funkcije arkus tangens in za tako določen a nedoločeni integral tudi izračunaj.**Rešitev:**

Uporabimo per-partes

$$u = \ln(1 + \sqrt{x}) \quad dv = dx \implies du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \quad v = x$$

in dobimo

$$\int \ln(1 + \sqrt{x}) \, dx = x \ln(1 + \sqrt{x}) - \int \frac{x \, dx}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \dots$$

V zadnji integral uvedemo novo spremenljivko $x = t^2$, $dx = 2t \, dt$ in dobimo

$$\begin{aligned} \dots &= x \ln(1 + \sqrt{x}) - \int \frac{t^2}{1 + t} \, dt = x \ln(1 + \sqrt{x}) - \int t - 1 + \frac{1}{1 + t} \, dt = \\ &= x \ln(1 + \sqrt{x}) - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1 + t| + C = x \ln(1 + \sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

Po nastavku imamo

$$\int \frac{2x^3 - ax^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2} \, dx = A \ln(1 + x^2) + B \arctan x + \frac{Cx + D}{1 + x^2}.$$

Izberemo $B = 0$ in dobimo

$$\int \frac{2x^3 - ax^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2} \, dx = A \ln(1 + x^2) + \frac{Cx + D}{1 + x^2}.$$

Odvajamo obe strani in dobimo

$$\frac{2x^3 - ax^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2} = \frac{2Ax}{1 + x^2} + \frac{C(1 + x^2) - (Cx + D)2x}{(1 + x^2)^2},$$

od koder dobimo

$$\frac{2x^3 - ax^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2} = \frac{2Ax^3 - Cx^2 + (2A - 2D)x + C}{(1 + x^2)^2},$$

in dobimo

$$A = 1, C = 1 \implies a = 1 \quad D = \frac{1}{2}.$$

Torej, veljati mora $a = 1$ in potem dobimo

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + x + 1}{(1 + x^2)^2} \, dx = \ln(1 + x^2) + \frac{x + \frac{1}{2}}{1 + x^2} + konst.$$

2. naloga (25 točk)

Dana naj bo krivulja K , parametrizirana z

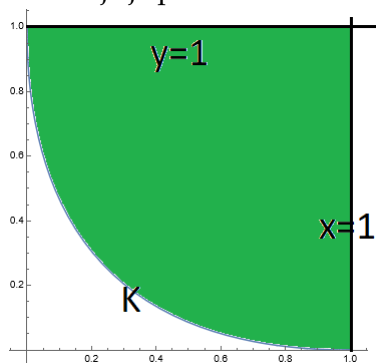
$$\vec{r}(t) = (\cos^4 t, \sin^4 t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

a) Skiciraj krivuljo K .

b) Določi ploščino območja, ki ga omejujejo krivulja K ter premici $x = 1$ in $y = 1$.

Rešitev:

Območje je prikazano na sliki:



Ploščina znaša

$$\begin{aligned} P &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{x}y - x\dot{y} dt = 1 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^3 t \cos^3 t dt = 1 - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2t))^3 dt = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(2t)) \sin(2t) dt = (u = \cos(2t)) = 1 - \frac{1}{8} \int_{-1}^1 1 - u^2 du = \dots = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

3. naloga (25 točk)

Dan naj bo posplošeni integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^a \ln(1+x)}.$$

Določi vse $a \in \mathbb{R}$, za katere dani integral konvergira.

Rešitev:

Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^a \ln(1+x)} = 0,$$

tako da pri spodnji meji ni težav s konvergenco.

Imamo (malo preoblikujemo)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^a \ln(1+x)} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{x^{4a}}{(1+x^4)^a \ln(1+x)}}{x^{4a-2}} dx$$

Velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{4a}}{(1+x^4)^a \ln(1+x)} = 0,$$

torej, če je $4a - 2 > 1$, oz. $a > \frac{3}{4}$ integral gotovo konvergira.

Naj bo sedaj $a \leq \frac{3}{4}$. Potem imamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^a \ln(1+x)} &\geq \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^{\frac{3}{4}} \ln(1+x)} \geq \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^4)^{\frac{3}{4}} \ln(1+x)} \geq \\ &\geq \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{(2x^4)^{\frac{3}{4}} \ln(1+x)} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln(1+x)} \geq \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x) \ln(1+x)} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \int_2^{\infty} \frac{dt}{t \ln t} = \\ &= \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \lim_{M \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\ln M}{\ln 2} \right) = \infty, \end{aligned}$$

torej integral divergira.

Integral konvergira natanko tedaj, ko je $a \in (\frac{3}{4}, \infty)$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih realnih števil in

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a_n}$$

številsko vrsto, prirejeno zaporedju $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takšno zaporedje pozitivnih števil, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Ali konvergira vrsta S ?

b) Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje z lastnostjo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1.$$

Ali vrsta S konvergira?

c) Naj bo $a_n = \sqrt{n}$. Ali vrsta S konvergira?

d) Poišči primer monotonno naraščajočega, neomejenega zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da bo vrsta S divergirala.

Rešitev:

Velja

$$\frac{a_n}{e^{a_n}} \leq a_n$$

ker je a_n pozitivno zaporedje, tako da iz konvergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi konvergenca vrste S . Uporabimo korenski kriterij in dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n e^{-a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{a_n}{n}} = e^{-1},$$

saj $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$ implicira, da je za vsak $\epsilon > 0$ velja $(1 - \epsilon)n \leq a_n \leq (1 + \epsilon)n$ za vse dovolj velike n . Od tod pa sledi, da je

$$\sqrt[n]{(1 - \epsilon)n} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{(1 + \epsilon)n}$$

Leva in desna stran konvergirata k 1, torej je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Vrsta torej konvergira.

Imamo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}.$$

V tem primeru kvocientni in korenski kriterij ne delujeta. Najlažje je uporabiti integralni kriterij, saj je odvod funkcije

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} \right)' = \frac{\frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)}{e^{2\sqrt{x}}} \leq 0$$

torej funkcija pada (oz. strogo pada za $x > 1$).

Imamo integral (ki ga malo preoblikujemo npr.)

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} dx = \int_1^{\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{e^{\sqrt{x}}} dx$$

Velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^5}{e^t} = L'Hop = \dots = 0,$$

torej integral konvergira. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$ torej konvergira.

Opomba: Konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$ bi lahko ugotovili tudi s pomočjo Raabejevega kriterija (je malo bolj komplicirana limita za izračunati, pride pa ∞).

Izberemo $a_n = \ln n$ in dobimo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, ki divergira po primerjalnemu kriteriju (je večja od harmonične vrste).