

Poenoteno in poenostavljeno računanje limit

Josipina Pina Podobnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

27. april 2022

1 Hiperrealna števila

Definicija 1 Število h je infinitezimalno, če velja ena izmed lastnosti:

- (1) $h > 0$ in $h < r$ za vsako pozitivno realno število r .
- (2) $h < 0$ in $h > r$ za vsako negativno realno število r .

Z drugimi besedami: infinitezimalno število je neskončno majhno neničelno število.

Definicija 2 Množico števil oblike $x + \omega$, za neko realno število x in neko infinitezimalno število ω , imenujemo hiperrealna števila. Oznaka: ${}^*\mathbb{R}$.

Definicija 3 Naj bosta $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Če $x \neq 0$, potem $x \approx y$ če je $\frac{y-x}{x}$ enak 0 ali infinitezimalno število. Velja tudi $0 \approx 0$.

Naj bo ω infinitezimalno število, $\Omega := \frac{1}{\omega}$ in r neko pozitivno realno število. Iz $\omega < \frac{1}{r}$ sledi, da je $\Omega > r$. Torej je Ω večje od vsakega pozitivnega realnega števila in posledično "enak" neskončno, kot tudi vsaka njegova potenca z naravnim eksponentom in vsaka potenca z njim v eksponentu. Seveda, višji kot je eksponent $k \in \mathbb{R}$ v Ω^k , večje število imamo.

Zgled 1 (1) $\sqrt{2} + \omega \approx \sqrt{2}$

(2) $5 + \omega + 2\omega^2 \approx 5$

(3) $-3\Omega^2 + 5\Omega^{1.7} - 4255 \approx -3\Omega^2$

(4) $\frac{(1+\omega)^2 - 1}{\omega} = \frac{1+2\omega+\omega^2-1}{\omega} = \frac{2\omega+\omega^2}{\omega} \approx \frac{2\omega}{\omega} = 2$

Zgornje aproksimacije so pravzaprav bolj ekvivalenčne relacije kot računske operacije. Kot rezultat zapišemo najbližje *preprostejše* število. Sledili bomo Principu treh R-jev (angleško *to render the real result*).

Definicija 4 (Pravilo treh R-jev) Naj bo $x \in {}^*\mathbb{R}$.

- (1) Če je x enak 0 ali infinitezimalen, pravimo da x **uprizori realno število 0** in pišemo $x \doteq 0$.
- (2) Če je $x \approx r$ za neko neničelno realno število r , pravimo da x **uprizori realno število r** in pišemo $x \doteq r$.
- (3) Če je $x \approx A$ za neko neskončno (tudi neomejeno) hiperrealno število A , pravimo da x **uprizori realno število ∞** , če je A pozitiven oziroma $-\infty$, če je A negativen. Pišemo $x \doteq \infty$ oz. $x \doteq -\infty$.

Opomba. Ko je rezultat aproksimacije realno število, ponavadi ne pišemo simbola za uprizarjanje.

Zgled 2 (1) $\sqrt{2} + \omega \approx \sqrt{2}$

(2) $5 + \omega + 2\omega^2 \approx 5$

(3) $-3\Omega^2 + 5\Omega^{1.7} - 4255 \approx -3\Omega^2 \doteq \infty$

(4) $7\omega^2 + \omega^3 \approx 7\omega^2 \doteq 0$

Množica hiperrealnih števil tvori urejeni obseg, ki vsebuje realna števila kot podobseg. Po t.i. principu prenosa vse algebraične formule, ki veljajo za realna števila, veljajo tudi za hiperrealna števila. Velja še več:

Trditev 1 (princip prenosa) Algebraična formula velja v množici realnih števil, natanko tedaj ko velja v množici hiperrealnih števil.

Obstaja nekaj tehničnih predpostavk iz matematične logike, ki si jih lahko preberete v [2], vendar ne izključijo nobene formule iz Analize 1.

2 Obojestranske limite

Definicija 5 (obojestranska limita) Naj bo f funkcija in b realno število. Če $f(b + \alpha)$ uprizarja isto realno število L za vsako infinitezimalno število α , potem velja

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L.$$

Posebej, če je L realno število (t.j. ne $\pm\infty$), pravimo da ta limita obstaja.

Definicija je ekvivalentna $\epsilon - \delta$ definiciji, le da do rezultata pridemo z aproksimacijo in uprizarjanjem realnih števil. Za izračun limite $x \rightarrow b$, uporabimo dano funkcijo v $b + \alpha$ za poljubno infinitezimalno število α in se prepričamo, da $f(b + \alpha)$ vselej uprizori isto realno število.

Zgled 3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} &= \frac{(3 + \alpha)^2 + 2(3 + \alpha) - 15}{(3 + \alpha) - 3} \\ &= \frac{9 + 6\alpha + \alpha^2 + 6 + 2\alpha - 15}{\alpha} = \frac{8\alpha + \alpha^2}{\alpha} \approx \frac{8\alpha}{\alpha} = 8\end{aligned}$$

Ker je bilo α poljubno število, smo ugotovili, da $f(b + \alpha)$ vedno uprizori isto realno število, torej ta limita obstaja in je enaka 8.

Vendar pa ta postopek ni vedno najhitrejši, saj lahko zahteva ogromno računskih operacij, ki se jim s kakšnim drugim postopkom morda izognemo. Kljub temu pa predstavlja poenostavljen in poenoten pristop k računanju limit vseh elementarnih funkcij.

Zgled 4 Za vsako infinitizemalno število α velja $\sin \alpha \approx \alpha$. Sledi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x - \sin x} = \frac{\sin 3\alpha}{5\alpha - \sin \alpha} \approx \frac{3\alpha}{5\alpha - \alpha} = \frac{3}{4}$$

Zgled 5 Naj bosta α in ω infinitezimalni števili, $A := \frac{1}{\alpha}$ in $\Omega := \frac{1}{\omega}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x - 2)^2} = \frac{2 + \alpha}{(2 + \alpha - 2)^2} = \frac{2 + \alpha}{\alpha^2} \approx \frac{2}{\alpha^2} = 2A^2 \doteq \infty$$

Postopek lahko uporabimo tudi za izračun limit, ki prvotno potrebujejo *izrek sendviča*.

Zgled 6

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \alpha \sin \frac{1}{\alpha} = \alpha \sin A \doteq 0$$

saj je po principu prenosa $-1 \leq \sin A \leq 1$ in $\alpha \sin A$ infinitezimalno, torej uprizori realno število 0.

Vseeno pa moramo biti pozorni na aproksimacije, ki nas pripeljejo do 0.

Zgled 7

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 2} = \frac{\sqrt{(2 + \alpha) + 7} - 3}{(2 + \alpha) - 2} = \frac{\sqrt{9 + \alpha} - 3}{\alpha}.$$

Želeli bi si zaključiti $\sqrt{9} - 3 = 0$, vendar imamo tudi v imenovalcu število, ki uprizarja 0. Vrniti se moramo nazaj na začetek in postopati drugače. V tem primeru pomnožimo števec in imenovalec s konjugiranim korenskim izrazom:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} &= \frac{\sqrt{9+\alpha} - 3}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{9+\alpha} + 3}{\sqrt{9+\alpha} + 3} \\ &= \frac{9 + \alpha - 9}{\alpha(\sqrt{9+\alpha} + 3)} = \frac{\alpha}{\alpha(\sqrt{9+\alpha} + 3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9+\alpha} + 3} \approx \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ni pa nujno, da obojestranska limita sploh obstaja.

Zgled 8

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2+\alpha}{2+\alpha-2} = \frac{2+\alpha}{\alpha} \approx \frac{2}{\alpha} = 2A$$

Ne moremo zaključiti niti ∞ niti $-\infty$, saj je bilo α poljubno infinitezimalno število, ne nujno pozitivno in ne nujno negativno. Torej obojestranska limita ne obstaja.

Podobno ne obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{\alpha} = \sin A \in [-1, 1].$$

3 Enostranske limite

Z enostranskimi limitami je zelo podobno.

Definicija 6 (Enostranska limita) Naj bo f funkcija in b realno število.

- (1) Če $f(b + \omega)$ uprizarja isto realno število L za vsako pozitivno infinitezimalno število ω , potem pišemo

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L.$$

Posebej, če je L realno število (t.j. ne $\pm\infty$), pravimo da ta limita obstaja.

- (2) Če $f(b - \omega)$ uprizarja isto realno število L za vsako pozitivno infinitezimalno število ω , potem velja

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L.$$

Posebej, če je L realno število (t.j. ne $\pm\infty$), pravimo da ta limita obstaja.

Kot sugestira definicija, je postopek pri računanju enostranskih limit enak kot pri dvostranskih, le da pri iskanju $\lim_{x \rightarrow b^+}$ funkcijo uporabimo v $x = b + \omega$, pri iskanju $\lim_{x \rightarrow b^-}$ pa v $x = b - \omega$.

Zgled 9

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2-\omega}{2-\omega-2} = \frac{2-\omega}{-\omega} \approx \frac{2}{-\omega} = -2\Omega \doteq -\infty$$

Zgled 10

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{|(3+\omega)-3|}{(3+\omega)-3} = \frac{|\omega|}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} = 1$$

Zgled 11

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{|(3-\omega)-3|}{(3-\omega)-3} = \frac{|-\omega|}{-\omega} = \frac{\omega}{-\omega} = -1$$

Definicija 7 (Zveznost - Cauchy) Naj bo f funkcija in naj bo x realno število iz domene funkcije f . Potem je f zvezna v x , če $f(x + \alpha)$ uprizori isto realno število za vsako infinitezimalno število α , in to je $f(x)$.

4 Limite v neskončnosti

Definicija 8 Naj bo ω infinitezimalno število in $\Omega = \frac{1}{\omega}$.

- (1) Če $f(\Omega)$ uprizarja isto realno število L za vsako pozitivno hiperrealno število Ω , potem pišemo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Posebej, če je L realno število (t.j. ne $\pm\infty$), pravimo da ta limita obstaja in ima f vodoravno asimptoto $y = L$ (z desne).

- (2) Če $f(\Omega)$ uprizarja isto realno število L za vsako pozitivno hiperrealno število Ω , potem velja

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Posebej, če je L realno število (t.j. ne $\pm\infty$), pravimo da ta limita obstaja in ima f vodoravno asimptoto $y = L$ (z leve).

Zgled 12

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 1} = \frac{\Omega^3 - 2\Omega + 7}{\Omega^2 + 1} \approx \frac{\Omega^3}{\Omega^2} = \Omega \doteq \infty$$

5 Vaje

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 9}{x^2 + 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7x - 1}}{x + 3}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7x - 1}}{x + 3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a}, a \in \mathbb{R}^+$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 + 1}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$$

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

infinitesimal infinitezimalen

hyperreals hiperrealna števila

to render uprizoriti, zapisati z nekim enostavnejšim, a bližnjim številom

Rendering a real result (3 R's principle) Princip treh R-jev

transfer principle princip prenosa

Literatura

- [1] C. Bryan Dawson (2019). *Calculus Limits Unified and Simplified*, the College Mathematics Journal, 50:5, 331-342, DOI: 10.1080/07468342.2019.1662706
- [2] Goldblatt, R.(1998). *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 188. New York: Springer-Verlag.