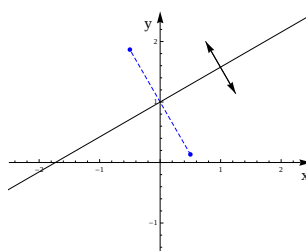


# 1. sklop dodatnih vaj iz Afine in projektivne geometrije

---

- (1) Zapiši predpis za zrcaljenje čez premico  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$  v evklidski ravnini.

Rešitev:  $\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$



- (2) Geometrično opiši naslednji izometriji evklidske ravnine:

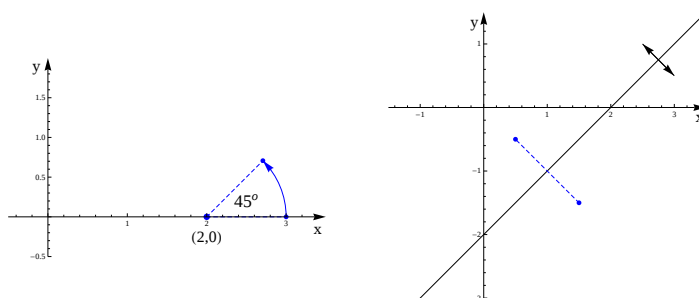
(a)  $\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix},$

(b)  $\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$

Rešitev:

- (a) Rotacija za kot  $\phi = 45^\circ$  okoli točke  $(2, 0)$ ,

- (b) Zrcaljenje čez premico  $y = x - 2$ .



- (3) Naj bo  $ABC$  enakokrak pravokotni trikotnik v  $\mathbb{R}^2$  s pravim kotom pri oglišču  $C$  in naj bodo  $\tau_{AB}$ ,  $\tau_{BC}$  in  $\tau_{CA}$  zrcaljenja preko nosilk stranic trikotnika. Geometrično opiši izometriji:

$$\tau_1 = \tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CA},$$

$$\tau_2 = \tau_{CA} \circ \tau_{AB} \circ \tau_{BC}.$$

Rešitev: Označimo oglišča z  $A(a, 0)$ ,  $B(0, a)$  in  $C(0, 0)$ . Potem je  $\tau_1$  zrcalni zdrs čez premico  $y = x$  za vektor  $(a, a)$ ,  $\tau_2$  pa zrcalni zdrs čez premico  $y = -x$  za vektor  $(a, -a)$ .

- (4) Pokaži, da je vsaka izometrija evklidske ravnine oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{b},$$

kjer je  $Q$  ortogonalna matrika velikosti  $2 \times 2$  in  $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$  nek vektor.

- (5) Pokaži, da lahko vsako izometrijo evklidske ravnine zapišemo kot kompozitum največ treh zrcaljenj.
- (6) Geometrično opiši izometrijo evklidskega prostora, ki je določena z matriko

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Zrcaljenje čez ravnino  $x - y - z = 0$ .

- (7) Zapiši rotacijsko matriko, ki predstavlja rotacijo za kot  $\phi = 60^\circ$  okoli premice s smernim vektorjem  $\vec{s} = (1, 1, 1)$ .

Rešitev:  $Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$

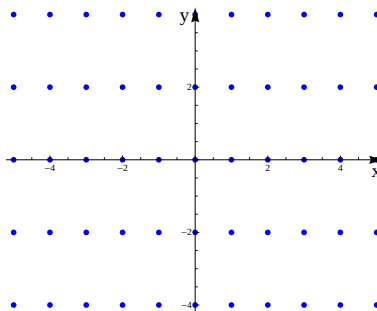
- (8) Poišči vse izometrije evklidske ravnine, ki ohranjajo pravokotno mrežo

$$L = \{(m, 2n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Rešitev: Vsaka izometrija mreže  $L$  je oblike

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 2l \end{bmatrix},$$

kjer sta  $k$  in  $l$  celi števili.



- (9) Poišči afino transformacijo afine ravnine  $\mathbb{F}_5^2$ , ki preslika točko  $(0, 0)$  v  $(1, 1)$ , točko  $(1, 0)$  v  $(2, 2)$ , točko  $(0, 1)$  pa v  $(0, 2)$ .

Rešitev: Iskana afina transformacija ima predpis

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (10) V afini ravnini  $\mathbb{R}^2$  sta dani premici  $p_1 : y = -2$  in  $p_2 : x = 2$  ter krožnici  $K_1 : x^2 + y^2 = 1$  in  $K_2 : (x + 2)^2 + y^2 = 4$ .
- (a) Izračunaj predpis kakšne afine transformacije  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ki preslika premico  $p_1$  na premico  $p_2$  in krožnico  $K_1$  na krožnico  $K_2$ .
- (b) Pokaži, da je afina transformacija, ki zadošča pogojem iz (a) dela, enolično določena.

Rešitev:

- (a) Iskana afina transformacija ima predpis

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (11) V ravnini  $\mathbb{R}^2$  je dan trikotnik z oglišči  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$  in  $C(0, 1)$ . Koliko je vseh afinih transformacij  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ki preslikajo trikotnik  $ABC$  nazaj nase?

Rešitev: Vsaka takšna afina transformacija preslika oglišča v oglišča. Dobimo 6 različnih afinih transformacij.

- (12) V prostoru  $\mathbb{R}^3$  so dane premice  $p : x = 0, z = 1$ ,  $q : y = 0, z = -1$  in  $r : x = 0, y = 0$ . Izračunaj predpise vseh afinih transformacij  $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ki preslikajo  $p$  na  $q$ ,  $q$  na  $p$ , premico  $r$  pa nazaj nase.

Rešitev: Vsaka takšna afina transformacija je dana s predpisom

$$\tau(x, y, z) = (ay, bx, -z),$$

kjer sta  $a$  in  $b$  neničelni realni števili.

- (13) V evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^3$  je dan trikotnik  $ABC$  z oglišči  $A(2, 2, 0)$ ,  $B(0, 0, 2)$  in  $C(1, 3, 0)$  in premica  $p$  s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (0, 2, 3) + t(1, 1, 1)$ .

- (a) Ugotovi, ali premica  $p$  seka trikotnik  $ABC$ .
- (b) Naj bo  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  afina transformacija s predpisom

$$F(x, y, z) = (x + y + z + 1, y + z, z + 2)$$

in  $\Pi$  ravnina, ki vsebuje trikotnik  $ABC$ . Ali je ravnina  $F(\Pi)$  vzporedna premici  $p$ ?

Rešitev:

(a) Premica  $p$  in trikotnik  $ABC$  se ne sekata.

(b) Ravnina  $F(\Pi)$  ni vzporedna premici  $p$ .

(14) V evklidski ravnini  $\mathbb{R}^2$  sta dani elipsi:

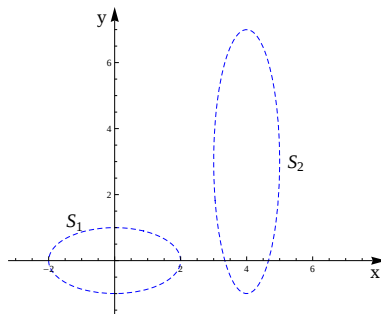
$$\mathcal{S}_1 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$\mathcal{S}_2 : (x-4)^2 + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

Poišči afino transformacijo  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ki elipso  $\mathcal{S}_1$  preslika na elipso  $\mathcal{S}_2$ .

Rešitev: Takšnih afinih transformacij je več. Ena izmed njih je

$$\tau(x, y) = (-y + 4, 2x + 3).$$



(15) V afini ravnini  $\mathbb{F}_5^2$  sta dani premici:

$$p : \{\alpha(1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{F}_5\},$$

$$q : \{\alpha(0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{F}_5\}.$$

(a) Koliko je afinih transformacij  $\tau : \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$ , ki preslikajo premico  $p$  na premico  $q$ , premico  $q$  pa na premico  $p$ ?

(b) Ali je afina transformacija, ki zadošča zgornjemu pogoju, natanko določena, če velja še  $\tau(1, 1) = (2, 1)$ ? Če je, zapiši njen predpis.

Rešitev:

(a) Iz predpostavke sledi, da je  $\tau(0, 0) = (0, 0)$ , kar pomeni, da je preslikava  $\tau$  linearna. Hkrati mora biti oblike

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

za neka  $b, c \in \mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$ . Vseh takih afinih transformacij je 16.

(b) Z dodatnim pogojem je preslikava  $\tau$  natanko določena in velja

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$