

# Matematika II

## 3. kolokvij

1. naloga [25 točk]

- (a) Katera točka na paraboli  $y = x^2$  je najbližja točki  $(4, 0)$  v metriki  $d_1$ ?
- (b) Pokaži, da je funkcija  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , dana s predpisom

$$f(x) = -2 + \sqrt{6 + 4x}$$

skrčitev. Izračunaj fiksno točko.

2. naloga [25 točk]

Dana je funkcija  $f(x) = |x|$ .

- (a) Funkcijo  $f$  razvij v Fourierovo vrsto na  $[-\pi, \pi]$ .
- (b) Nariši graf vsote Fourierove vrste.
- (c) Izračunaj  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ .

3. naloga [20 točk]

Dano je vektorsko polje  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ .

- (a) Dokaži, da je vektorsko polje  $\vec{F}$  potencialno in določi njegov potencial  $f$ .
- (b) Izračunaj  $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ , kjer je  $C$  daljica med točkama  $A(3, 0, 0)$  in  $B(-3, 2\pi, 0)$ .

4. naloga [30 točk]

Ploskev  $\mathcal{S}$  naj bo dana z enačbo

$$\vec{r}(u, v) = (u\sqrt{1-v^2}, uv, \sqrt{1-u^2})$$

za  $0 \leq u \leq 1$  in  $0 \leq v \leq 1$ . Ploskev  $\mathcal{S}$  predstavlja osmino enotske sfere, ki leži v prvem oktantu.

- (a) Izračunaj glavni ukrivljenosti in glavni smeri v točki  $T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .
- (b) Izračunaj pretok vektorskega polja  $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$  skozi ploskev  $\mathcal{S}$ .
- (c) Ploskev zapremo z ravnimi ploskvami v ravninah  $xz$ ,  $yz$  in  $xy$ . Normala dobljene ploskve naj kaže v vsaki točki plašča navzven. Izračunajte površino dobljene ploskve in pretok vektorskega polja  $\vec{F}$  skozi dobljeno ploskev.