

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna množica, če velja

$$\forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

1. Dane so sledeče množice:

$$\begin{aligned} A &= \{-1, 1\}, & B &= [-1, 1], & C &= (-1, 0) \cup (0, 1), & D &= (-1, 0) \times (0, 1), \\ E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, & F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ G &= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}, & H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}, & K &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}. \end{aligned}$$

Določi, katere od njih so konveksne in katere niso.

2. Naj bo $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linearna preslikava ter $K \subseteq \mathbb{R}^n$ in $S \subseteq \mathbb{R}^m$ konveksni množici. Dokaži, da sta slika $A(K)$ in prasluka $A^{-1}(S)$ konveksni množici.

3. Naj bosta $S, K \subseteq \mathbb{R}^n$ množici, pri čemer je množica K konveksna. Dokaži, da je množica $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + S \subseteq K\}$ konveksna.

Naj bo $S = \{(0, 0), (1, 0)\}$ in $K = [1, 3] \times [1, 3]$. Določi množico A !

4. Dokaži, da je množica K konveksna natanko tedaj, ko za poljubni realni števili $\alpha, \beta \geq 0$ velja $(\alpha + \beta)K = \alpha K + \beta K$.

5. Dokaži, da je množica

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < u + v < 1 \wedge -1 < u - v < 1\} \cup \{(-1, 0), (1, 0)\}$$

konveksna.

Farkaseva lema v dveh oblikah:

$$\begin{aligned} \exists x \geq 0 : Ax = b &\iff \forall y : (A^\top y \geq 0 \Rightarrow b^\top y \geq 0) \\ \exists x \geq 0 : Ax \leq b &\iff \forall y \geq 0 : (A^\top y \geq 0 \Rightarrow b^\top y \geq 0) \end{aligned}$$

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna funkcija, če je K konveksna množica in velja

$$\forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

6. Določi konveksne ovojnice naslednjih množic:

$$\begin{aligned} A &= \{x\} \subset \mathbb{R}^n, & B &= \{x, y\} \subset \mathbb{R}^2, & C &= \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}^2, & D &= \{w, x, y, z\} \subset \mathbb{R}^3, \\ E &= \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1)\}, & F &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}, \\ G &= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}, & H &= \{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}, & K &= \{(x, (x - 1)^2(x + 1)^2) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

7. Dana sta matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & -1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 1/8 & 1/16 \end{pmatrix} \quad \text{in vektor} \quad b = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ -1/8 \end{pmatrix}.$$

Dokaži, da sistem linearnih enačb $Ax = b$ nima rešitve, za katero bi veljalo $x \geq 0$.

8. S pomočjo Farkaseve leme dokaži, da je sledeči linearni problem nedopusten.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

9. Določi območja, kjer so sledeče funkcije konveksne:

$$c(x) = -2, \quad f(x) = 1 - 2x, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3, \quad k(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2.$$