

8 Integrali

Naloga 8.1. Izračunajte naslednje integrale.

(a) $\int (x^2 + 1)^3 dx$

(b) $\int \left(\frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx$

(c) $\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$

(d) $\int (3^x - 5e^x + 4 \cos(x)) dx$

Naloga 8.2. Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte naslednje integrale.

(a) $\int \sin(3x) dx$

(b) $\int \tan(x) dx$

(c) $\int x(2x + 5)^{10} dx$

(d) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

(e) $\int \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} dx$

(f) $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx$

(g) $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$

(h) $\int \frac{dx}{x(\ln(x) + 1)^2}$

(i) $\int \sin(x) \cos(x) dx$

(j) $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$

(k) $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

(l) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

(m) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ s pomočjo $t = \arcsin(x)$

(n) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$

(o) $\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$ s pomočjo $t = x - 1$

(p) $\int \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} dx$ s pomočjo $t = \sqrt{x}$

Naloga 8.3. S pravilom per partes izračunajte naslednje integrale.

(a) $\int x \sin(x) dx$

(b) $\int x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

(c) $\int x^2 e^{-x} dx$

(d) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(e) $\int \arctan(x) dx$

(f) $\int (x^2 - 3) \ln(x) dx$

Naloga 8.4. Izračunajte integrale naslednjih racionalnih funkcij.

(a) $\int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$

(b) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

(c) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x + 2} dx$

(d) $\int \frac{x + 1}{x^2 - x - 6} dx$

(e) $\int \frac{x}{x^2 - 2x + 1} dx$

(f) $\int \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$

(g) $\int \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)^2} dx$

(h) $\int \frac{x + 4}{x(x^2 + 4)} dx$

(i) $\int \frac{x^2 - 4}{x(x^2 + 4)} dx$

(j) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x + 6}{(x^2 - 1)(x^2 + 4)} dx$

(k) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2)} dx$

Naloga 8.5. Izračunajte integrale naslednjih korenskih funkcij.

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x})}$

(b) $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

(d) $\int \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x - 3}} dx$

Naloga 8.6. Izračunajte naslednje določene integrale.

(a) $\int_1^8 \left(4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

(b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

(c) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

(d) $\int_1^e \ln(x) dx$

(e) $\int_0^2 |1 - x| dx$

(f) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

(g) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

(h) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$

(i) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

Naloga 8.7. Izračunajte ploščino omejenega območja, ki ga omejujejo krivulje:

- (a) $y = x^2 - 5x + 6$ in obe koordinatni osi,
- (b) $y^2 = 2x$ in $x^2 = 2y$,
- (c) $y = 3x - x^2$ in $y = x - 3$ ter leži na levi strani y -osi,
- (d) $y = 2^x$, $y = 2$ in $x = 0$,
- (e) $y = x$ in $y = x + \sin^2(x)$ za $0 \leq x \leq \pi$.

Naloga 8.8. V kakšnem razmerju razdeli parabola $y^2 = 2x$ ploščino kroga $x^2 + y^2 \leq 8$?

Naloga 8.9. Izračunajte ploščino območja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x - x^2\sqrt{x}\}$.

Naloga 8.10. Izračunajte dolžino loka krivulje $y = x\sqrt{x}$ za $0 \leq x \leq 2$.

Naloga 8.11. Izračunajte površino in prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če lik, omejen s krivuljami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ in $x = 2$, zavrtimo okoli x -osi.

Naloga 8.12. Izračunajte prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če okrog x -osi zavrtimo

- (a) graf funkcije $f(x) = 1 - x$ nad intervalom $[0, 1]$,
- (b) graf funkcije $f(x) = \sin(x)$ nad intervalom $[0, \pi]$,
- (c) lik, omejen s krivuljami $xy = 4$, $x = 4$, $x = 1$ in $y = 0$,
- (d) lik $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + 1 \leq y \leq \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}\}$.

Naloga 8.13. Izračunajte prostornino in površino

- (a) valja s polmerom R in višino h ,
- (b) stožca s polmerom osnovne ploskve R in višino h ,
- (c) krogle s polmerom R .