

1. kolokvij iz Slučajnih procesov 1
Finančna matematika
26.4.2022

1. Imamo proces štetja, kjer je število prihodov N_t do časa t porazdeljeno $N_t + 1 \sim \text{Geom}(\frac{1}{1+t^2})$.
- (a) Recimo, da ob vsakem prihodu vržemo standardno kocko, neodvisno od prihoda. Koliko je pričakovano skupno število pik do časa t ?
 - (b) Določi porazdelitev n -tega prihodnega časa S_n .
 - (c) Izračunaj pričakovan čas prvega prihodnega časa $\mathbb{E}(S_1)$.

Rešitev :

- (a) Z X_i označimo izid meta i -te kocke. Velja $\mathbb{E}(X_i) = 7/2$. Velja tudi $\mathbb{E}(N_t) = 1 + t^2 - 1 = t^2$. Po Waldovi identiteti imamo tako

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{N_t}) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N_t) = \frac{7}{2}t^2$$

- (b) Po osnovni ekvivalenci imamo

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(N_{t+1} > n) = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)^n = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^n$$

saj za $X \sim \text{Geom}(p)$ velja $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$ ($\{X > n\}$ je dogodek, da je prvih n poskusov Bernoullijevega zaporedja poskusov neuspešnih).

- (c) Integriramo lahko preživetveno funkcijo za $n = 1$

$$\mathbb{E}(S_1) = \int_0^\infty \mathbb{P}(S_1 > t)dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$$

2. Ribič lovi ribe v ribniku, kjer se nahajajo samo krapci in postrvi. Krapci prijemljejo v skladu z $\text{HPP}(\lambda)$, postrvi pa v skladu z $\text{HPP}(\mu)$, neodvisno drug od drugega. Ribič lovi, dokler ne ujame prvega krapca ali pa druge postrvi.

- (a) Koliko je pričakovan čas lova?
- (b) Recimo, da prva riba zagradi ob času t , ribič pa še ni utegnil potegniti ribe na plano, da bi videl kakšne vrste je. Koliko je sedaj (skupni) pričakovan čas lova, pogojno na ta dogodek?

Rešitev : Z S_n označimo čase prihodov krapov, z $\tilde{S}_n$ pa prihode postrvi, s T pa skupen čas lova.

(a) Velja

$$T = \min\{S_1, \tilde{S}_2\}$$

pri čemer vemo, da sta $S_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ in $\tilde{S}_2 \sim \text{Gama}(2, \mu)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Porazdelitev minimuma dveh neodvisnih spremenljivk lahko dobimo s pomočjo preživetvenih funkcij

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(\min\{S_1, \tilde{S}_2\} > t) = \mathbb{P}(S_1 > t, \tilde{S}_2 > t) \\ &= \mathbb{P}(S_1 > t)\mathbb{P}(\tilde{S}_2 > t) = e^{-\lambda t}(1 + \mu t)e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Pričakovano vrednost lahko spet dobimo z integriranjem

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)dt = \int_0^\infty (1 + \mu t)e^{-(\lambda + \mu)t}dt = \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

(b) S K označimo dogodek, da je prva riba krap, s P pa dogodek, da je prva riba postrv. Zdaj lahko za skupen čas lova T zapišemo

$$(T|T_1 = t) = t \cdot 1_K + (t + S) \cdot 1_P = t + S \cdot 1_P,$$

kjer smo z S označili čas (ki ga štejemo od t naprej), ko ujamemo prvega krapa ali drugo postrv in je T_1 prvi prihodni čas združenega HPP. Po (osnovni) lastnosti Markova vemo, da je $S \sim \min\{S_1, \tilde{S}_2\}$ in neodvisen od P . Potem velja

$$\mathbb{E}(T|T_1 = t) = t + \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(1_P)$$

Pričakovano vrednost $\mathbb{E}(S)$ lahko podobno kot v a) nalogi izračunamo z integralom

$$\mathbb{E}(S) = \int_0^\infty \mathbb{P}(S > t)dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda + \mu)t}dt = \frac{1}{\lambda + \mu}$$

ali pa opazimo, da je to prvi prihodni čas za združen HPP z jakostjo $\lambda + \mu$, saj vemo, da bomo z ribolovom končali ob prvi naslednji ribi, ne glede na to ali smo ujeli krapa ali postrv. Končni rezultat je torej

$$\mathbb{E}(T|T_1 = t) = t + \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

3. Dan je homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ . Za dana $n, k \in \mathbb{N}$ s p_k^n označimo *elementaren simetričen polinom stopnje k v n spremenljivkah*. Torej

$$p_k^n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Za $n < k$ je po dogovoru $p_k^n(x_1, \dots, x_n) = 0$.

(a) Naj bo $N \sim \text{Poiss}(\lambda)$. Pokaži, da za dan $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\mathbb{E}\binom{N}{k} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

Tu je $\binom{n}{k}$ običajni binomski simbol. Po dogovoru je $\binom{n}{k} = 0$ za $n < k$.

(b) Za dan $k \in \mathbb{N}$ izračunaj pričakovano vrednost

$$\mathbb{E}(p_k^{N_t}(S_1, \dots, S_{N_t}))$$

Kot običajno, N_t označuje število prihodov da časa t , S_n pa čas n -tega prihoda.

Rešitev :

(a) Direktno lahko računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\binom{N}{k} &= \frac{1}{k!} \mathbb{E}(N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-k+1)) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

Druge možnost je k -kratno odvajanje rodovne funkcije

$$\mathbb{E}(z^N) = e^{\lambda(z-1)}$$

in izračun pri $z \rightarrow 1$.

(b) Pogojimo na $N_t = n$. Zaradi simetrije polinomov p_n^k lahko pri izračunu uporabimo lastnost vrstilnih statistik:

$$((S_1, \dots, S_n) | N_t = n) \sim (U_1, \dots, U_n),$$

kjer so $U_1, \dots, U_n$ neodvisne enakomerne spremenljivke na $[0, t]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p_k^{N_t}(S_1, \dots, S_{N_t}) | N_t = n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_k}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} U_{i_1} U_{i_2} \dots U_{i_k}\right) \\ &= \binom{n}{k} \mathbb{E}(U_1 U_2 \dots U_k) \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{t}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Velja torej

$$\mathbb{E}(p_k^{N_t}(S_1, \dots, S_{N_t}) | N_t) = \binom{N_t}{k} \left(\frac{t}{2}\right)^k$$

Končno dobimo

$$\mathbb{E}(p_k^{N_t}(S_1, \dots, S_{N_t})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(p_k^{N_t}(S_1, \dots, S_{N_t}) | N_t)) = \mathbb{E}\left(\binom{N_t}{k} \left(\frac{t}{2}\right)^k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{t^{2k}}{2^k}$$

po (a) nalogi.