

Farkaseva lema v dveh oblikah:

$$\begin{aligned}\exists x \geq 0 : Ax = b &\iff \forall y : (A^\top y \geq 0 \Rightarrow b^\top y \geq 0) \\ \exists x \geq 0 : Ax \leq b &\iff \forall y \geq 0 : (A^\top y \geq 0 \Rightarrow b^\top y \geq 0)\end{aligned}$$

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$  je konveksna funkcija, če je  $K$  konveksna množica in velja

$$\forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1. Dana sta matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & -1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 1/8 & 1/16 \end{pmatrix} \quad \text{in vektor} \quad b = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ -1/8 \end{pmatrix}.$$

Dokaži, da sistem linearnih enačb  $Ax = b$  nima rešitve, za katero bi veljalo  $x \geq 0$ .

2. S pomočjo Farkaseve leme dokaži, da je sledeči linearni problem nedopusten.

$$\begin{aligned}\max \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

3. Določi območja, kjer so sledeče funkcije konveksne:

$$c(x) = -2, \quad f(x) = 1 - 2x, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3, \quad j(x) = |x|, \quad k(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2.$$

4. Dana je funkcija  $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x - 7y + 2$ . Dokaži, da je funkcija  $f$  konveksna.

5. Dokaži, da je funkcija  $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$  za  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$  konveksna.

6. Naj bo  $A$  konveksna množica in  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  konveksni preslikavi. Dokaži, da je  $h = \max\{f, g\}$  konveksna preslikava.

7. Dane so množice

$$\begin{aligned}A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0, x \geq y^2 \right\}, \\ B &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq y^2 + z^4, y^2 + \log(1 + y^2) \leq 0 \right\}, \\ C &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 + z^3 \leq 8 \right\}.\end{aligned}$$

Dokaži njihovo konveksnost.