$$\left(\bigcap Z_\lambda\right)^c = \bigcup \underbrace{Z_\lambda^c}_{\text{odp}}$$

Takojšnja posledica: družina vseh zaprtih podmnožic X vsebuje vse preseke in vse končne unije svojih elementov.

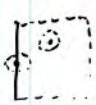
Včasih je bolj naravno povedati kaj razumemo kot zaprte množice:
Npr:
- Če rečemo, da so zaprte natanko vse končne podmnožice X dobimo ...

Zaprte množice - vsi preseki in vse končne unije
↳ vse končne množice so zaprte
⤳ vsi komplementi ~~odp~~ končnih množic so odprti

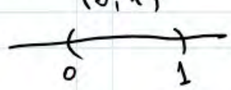
- Običajna intuicija je, da so rešitve enačb zaprte podmnožice, rešitve (strogih) neenačb pa odprte.
(to bomo kasneje utemeljili)

$A \subseteq X$

notranjost $\mathrm{Int}\,A$ = največja odprta množica, ki je vsebovana v A
(največja odprta podmnožica A)
= unija vseh odprtih podmnožic A



(0, 1)



$\mathrm{Int}_X A$ $\quad \mathring{A}$

zaprtje $\mathrm{Cl}\,A$ = najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A
= presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A $\quad \mathrm{Cl}_X A$ $\quad \overline{A}$

$= $ presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A $\quad Cl_X A \quad \overline{A}$

$Cl_{\mathbb{R}}(0,1) = [0,1] \qquad Cl_{(0,1)}(0,1) = (0,1)$

meja (rob) — frontier, boundary

$$Fr A = Cl A - Int A \qquad Fr_X A \quad \dot{A}$$

ZVEZNOST

Intuitivno je $f : X \to Y$ zvezna, če točke, ki so blizu v X slika v bližnje točke v Y

stroga ε-δ definicija $\left(\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x' \in X \; d(x,x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon\right)$

ali definicija z limito $\left(\forall x \in X \, \forall \{x_n\} \text{ v } X : \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)\right)$

sta pojmovno in tehnično kar zahtevni.

x je notranji v $f^{-1}(V)$

Topološki opis zveznosti funkcije $f : X \to Y$

Če $x \longmapsto f(x) = y$, ki je notranja v nekem $V \subseteq X$, potem se vse točke blizu x prav tako preslikajo v V

Drugače povedano, x je notranja točka $f^{-1}(V)$.

Tu je x poljuben, zato so vse točke $f^{-1}(V)$ notranje, torej $\boxed{f^{-1}(V) \text{ je odprta!}}$

Definicija $\quad f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zvezna, če za vsak $V \in \mathcal{T}_Y$ velja $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

$$f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$$

Torej f je zvezna, če je praslika vsake odprte množice odprta.

Ta opis je ekvivalenten prejšnjim, vendar bistveno preprostejši.

Trditev

Kompozitum zveznih funkcij je zvezen.

Dokaz

$$X \xrightarrow{f \text{ zvezna}} Y \xrightarrow{g \text{ zvezna}} Z$$

$$\underset{\text{odp}}{\cup\!\shortmid} \qquad\qquad \underset{g^{-1}V}{\overset{\cup\!\shortmid \text{ odp}}{}} \qquad\qquad \underset{V}{\overset{\cup\!\shortmid}{}} \text{ odp}$$

$$(g\circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}V)$$

$\boxtimes$

Primeri

(1) Zvezne funkcije, ki jih poznamo od prej.

(Tj. če sta X in Y opremljena z metrikama in je $f: X \to Y$ zvezna v običajnem ε-δ ali lim smislu, potem je zvezna tudi v topologiji)

(2) $f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ glede na trivialne ali diskretne topologije

$\mathcal{T}_Y$ trivialna $\rightsquigarrow$ vsi f so zvezni

$\mathcal{T}_X$ diskretna

(3) $\text{konst}: X \longrightarrow Y$

so vedno zvezne ; $V \subseteq Y$ $\quad \text{konst}_{y_0}^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset & y_0 \notin V \\ X & y_0 \in V \end{cases}$

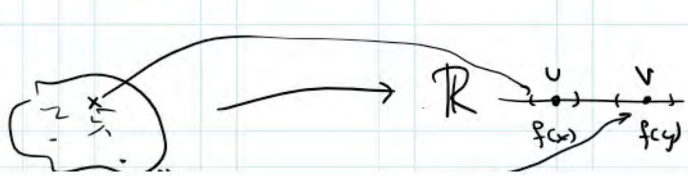
(4) $\text{Id}: X \longrightarrow X$ ali je zvezna?

$\text{Id}: (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ je zvezna $\iff \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$

(5) $f: (X, \mathcal{T}_{\text{končnih komplementov}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (z običajno topologijo)

↳ neskončen

$f(x) \neq f(x')$



$f(x) \neq f(x')$

$f^{-1}U$ odp, $f^{-1}V$ odp

disj: ne gre v $\mathcal{T}_{KK}$

samo konstante so zvezne

Topološki $\boxed{\text{prostor}}$, zvezna $\boxed{\text{preslikava}}$

(sicer množica / funkcija)

<u>IZREK</u> (karakterizacija zveznosti)

Ekvivalentne so trditve:

(1) $f: X \to Y$ je zvezna

(2) Za vsak $V^{odp} \subseteq Y$ je $f^{-1}(V)$ odprt v X.

(3) Za vsak $B^{zap} \subseteq Y$ je $f^{-1}(B)$ zaprt v X.

(4) Za vsak $A \subseteq X$ je $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz

(1) $\Leftrightarrow$ (2) definicija

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ ✓

(3) $\Leftrightarrow$ (4) (uporabili bomo $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ in $B \supseteq f(f^{-1}(B))$)

($\Rightarrow$) $A^{poljuben} \subseteq X$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\underbrace{\overline{f(A)}}_{\text{zaprta}})$$

$$\bar{A} \subseteq$$

$\hookrightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

($\Leftarrow$) $B^{zaprt} \subseteq Y$

$$B = \bar{B} \supseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \underset{(4)}{\supseteq} f(\overline{f^{-1}(B)})$$

$f^{-1}(B) \supseteq \overline{f^{-1}(B)} \Rightarrow$ velja enakost, torej je $f^{-1}(B)$ zaprta

☑

običajna definicija zveznosti: f ima neke lastnosti (ε-δ, lim ...)

topološka definicija zveznosti: f^{-1} slika odprte v odprte

HOMEOMORFIZMI

Kdaj sta dva topološka prostora enaka?

V algebri smo imeli $f: K \longrightarrow L$ je izomorfizem kolobarjev, če je f homomorfizem in bijekcija.
Drugače povedano: če je f bijektivna in tako f kot f^{-1} ohranjata algebrajsko strukturo.

Pri topologiji namesto homomorfizmov imamo zvezne funkcije.

Definicija $f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ je **homeomorfizem**, če je f bijekcija in sta f in f^{-1} zvezna.

Alternativno:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "f"] & Y \\
2^X = \mathcal{P}(X) \arrow[r, dashed, bend left, "\underline{f}"] & \mathcal{P}(Y) \arrow[l, dashed, bend left] \\
\cup & \cup \\
\mathcal{T}_X \arrow[r, dashed, bend left, "\underline{f}^{-1}\ f^{-1}\ \text{zv}"] & \mathcal{T}_Y \arrow[l, dashed, bend left, "f^{-1}\ \text{zvezna}\ f"]
\end{tikzcd}
$$

$A \longmapsto f(A)$

$f^{-1}(B) \longleftarrow B$

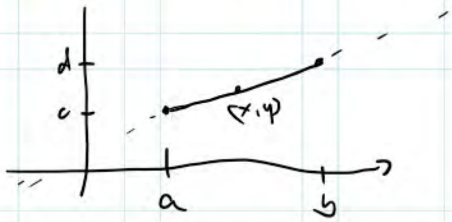
f bijektivna $\Leftrightarrow$ $\underline{f}, \underline{f}^{-1}$ sta bijekciji

drugače povedano f je homeomorfizem, če inducira bijekcijo med $\mathcal{T}_X$ in $\mathcal{T}_Y$

Pravimo, da sta $(X,\mathcal{T}_X)$ in $(Y,\mathcal{T}_Y)$ homeomorfna in pišemo $(X,\mathcal{T}_X)\approx(Y,\mathcal{T}_Y)$ ali kar $X\approx Y$.

Primeri (standardni homeomorfizmi)

- $[a,b]\approx[c,d]$



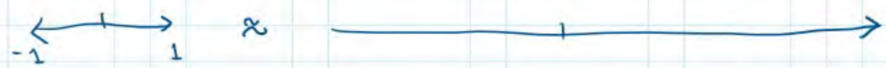
$$\frac{y-c}{d-c}=\frac{x-a}{b-a} \qquad f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$$

$$f^{-1}(y)=\frac{b-a}{d-c}(y-c)+a$$

$$[a,b]\underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}[c,d] \quad \text{bij., zvezni} \quad \text{homeomorfizem}$$

$[a,b)\approx(c,d]$, $(a,b)\approx(c,d)$, $[a,b)\approx[c,d)\approx(a,b]\approx(c,d]$

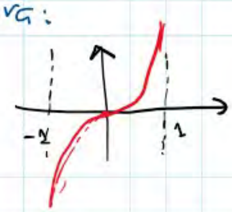
- $(-1,1)\approx\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$



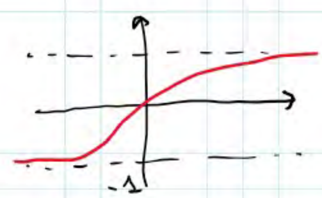
Imamo več možnosti kako interval raztegni na cel $\mathbb{R}$ (npr. tg in arctg)

Standardna izbira:

$f(x)=\frac{x}{1-|x|}$



$f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|}$



$$\mathring{B}^1=(-1,1)\underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}\mathbb{R}$$

↳ odprta enotska "krogla" v $\mathbb{R}^1$

Dobimo tudi $(0,1)\approx(0,+\infty)$ in $(-1,0)\approx(-\infty,0)$

$[0,1)\approx[0,+\infty)$ $\quad$ $(-1,0]\approx(-\infty,0]$

Vsi odprti intervali (končni in neskončni) so med seboj homeomorfni

Topološko ločimo samo tri tipe intervalov: odprte, zaprte in polodprte

Interval $\subseteq \mathbb{R} \approx (0,1)$, $\approx [0,1)$, $\approx [0,1]$

$[0,1) \not\approx (0,1)$

$[0,1) \xrightarrow[\approx]{f} (0,1)$ $\Downarrow$ $f(0)$

$(0,1) \xrightarrow[\approx]{f|} (0,1) \setminus \{f(0)\}$

Videli smo, da je vsak interval homeomorfen enemu od teh.

Kako vemo, da so te trije topološko različni?

$(0,1)$ $\not\approx$ $\not\approx$

$[0,1] \not\approx [0,1)$

Topološka lastnost je lastnost, ki se ohranja pri homeomorfizmih

povezanost je (tipična) topološka lastnost

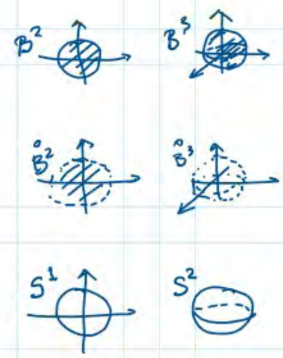
omejenost ni topološka lastnost $(0,1) \approx (0,+\infty)$

- Oznake:

$B^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$ zaprta enotska krogla

$\mathring{B}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| < 1\}$ odprta enotska krogla

$S^{n-1} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ enotska sfera $S^0 = \{-1, 1\}$



$\mathring{B}^n \approx \mathbb{R}^n$

$\mathring{B}^n \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$ $\quad f(\vec{x}) := \frac{\vec{x}}{1-\|\vec{x}\|}$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|}$

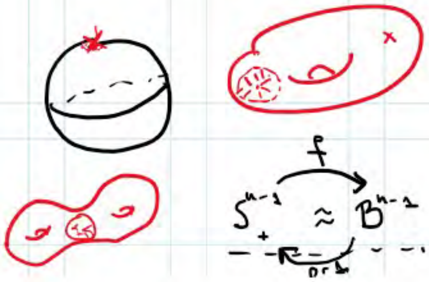
odprta krogla $\quad$ n-razsežni prostor

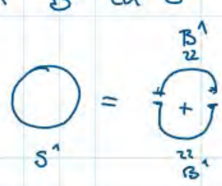
Zato upravičeno pravimo, da je $\mathring{B}^n$ n-razsežna (je homeomorfna $\mathbb{R}^n$)

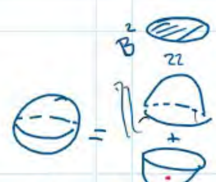
- Kakšna je zveza med B^n in S^n?

$S^{n-1}_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_n \geq 0\}$

$S^{n-1}_- = \{ - \quad - \quad \text{———}, x_n \leq 0\}$







$S^2 = B^2 \cup B^2$

$S^{n-1}_+ \xrightarrow[\approx]{f} B^{n-1}$

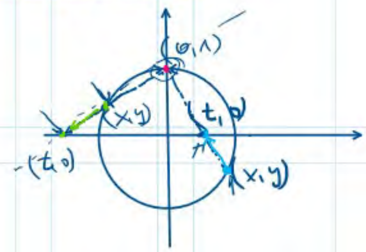
$$S^{n-1}_+ \underset{f^{-1}}{\approx} B^{n-1}$$

$$\underset{x_n \geq 0}{(x_1, \dots, x_n)} \overset{f}{\longmapsto} (x_1, \dots, x_{n-1}) \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \left(x_1, \dots, x_{n-1}, +\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}\right)$$

Bolj presenetljivo: $S^n - \{\text{ena točka}\} \approx \mathbb{R}^n$

$S^1 - \{(0,1)\} \approx \mathbb{R}$:

krožnica - točka "=" premica



Premica skoz točke: $(0,1)$, $\underset{S^1-(0,1)}{(x,y)}$ in $\underset{\mathbb{R}}{(t,0)}$

$$\frac{x-0}{y-1} = \frac{t-0}{0-1} \quad \text{oz.}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{1-y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$S^1 - \{(0,1)\} \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \frac{x}{1-y} \qquad (x_1, \dots, x_n)$$

$$f^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

Posplošitev na višje dimenzije:

$$S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\} \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$$

(pod $\mathbb{R}^{n+1}$)

$S^{n-1} - (0,\dots,0,1)$

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) := \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$$

$$\left(\text{ali } f(\vec{x}, y) := \frac{\vec{x}}{1-y}\right)$$

$$f^{-1}(\vec{x}) := \Bigg(\underbrace{\frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2+1}}_{n \text{ komponent}}, \underbrace{\frac{\|\vec{x}\|^2-1}{\|\vec{x}\|^2+1}}_{(n+1)\text{-va komp.}}\Bigg)$$

Računanje f^{-1} je včasih zahtevno, zato je zaželjeno, da lahko homeomorfnost f ugotovimo neposredno.

$f: X \to Y$ je zvezna, če je praslika vsake odprte množice odprta

(oz. je praslika vsake zaprte množice zaprta)

$f: X \to Y$ je odprta, če je slika vsake odprte množice odprta.

je zaprta, če je slika vsake zaprte množice zaprta.

Očitno: če je f bijekcija, potem

$$f^{-1} \text{ zvezna} \iff f \text{ odprta} \iff f \text{ zaprta}$$

Zato

Trditev

Ekvivalentne so trditve.

(1) $f: X \to Y$ je homeomorfizem.

(2) $f: X \to Y$ je zvezna bijekcija, f^{-1} je zvezna

(3) $f: X \to Y$ je zvezna in odprta bijekcija

(4) $f: X \to Y$ je zvezna in zaprta bijekcija.

$\boxed{//}$

Smisel opisov (3) in (4) je v tem, da pogosto lahko preverimo zaprtost oz. odprtost f brez računanja f^{-1}.