

# Določeni integral

1. Po definiciji izračunaj integral funkcije  $f(x) = x^2$  na intervalu  $[0, 1]$ .

**Rešitev:**  $\frac{1}{3}$

2. Izračunaj naslednje določene integrale.

(a)  $\int_0^1 x^2 dx$

**Rešitev:**  $\frac{1}{3}$

(b)  $\int_0^2 (x + 2)^4 dx$

**Rešitev:**  $\frac{992}{5}$

(c)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

**Rešitev:**  $\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

(d)  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx$

**Rešitev:**  $\frac{1}{3} \ln \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

(e)  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

**Rešitev:**  $\frac{\pi a^2}{2}$

(f)  $\int_1^2 \ln x dx$

**Rešitev:**  $2 \ln 2 - 1$

(g)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$

**Rešitev:**  $\frac{e^{\pi-2}}{5}$

3. Za  $s > 0$  izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^s + 2^s + \dots + n^s}{n^{s+1}}.$$

**Rešitev:**  $\frac{1}{s+1}$

4. Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}.$$

**Rešitev:**  $e - 1$

5. Z uvedbo nove spremenljivke v določenem integralu dokaži, da velja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\arccos x} dx.$$

6. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo premice  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ ,  $y = 0$  in graf funkcije  $f(x) = \sin x$ .

**Rešitev:** 4

7. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta premica  $y = 1$  in graf funkcije  $f(x) = x^2$ .

**Rešitev:**  $\frac{4}{3}$

8. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  in  $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ .

**Rešitev:**  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

9. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij  $f(x) = 1$  in  $g(x) = 2 \cos^2 x$  nad intervalom  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Rešitev:** 1

10. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta premica  $y = e$  in graf funkcije  $f(x) = x \ln x$  nad intervalom  $[1, e]$ .

**Rešitev:**  $\frac{3e^2}{4} - e - \frac{1}{4}$

11. Izračunaj ploščino območja znotraj elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Rešitev:**  $\pi ab$

12. Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepata paraboli

$$y^2 = 2px \quad \text{in} \quad x^2 = 2py.$$

**Rešitev:**  $\frac{4p^2}{3}$

13. Izračunaj dolžino grafa funkcije  $f(x) = \operatorname{ch} x$  za  $x \in [0, 1]$ .

**Rešitev:**  $\operatorname{sh} 1$

14. Izračunaj dolžino loka parabole  $y = x^2$  nad intervalom  $[0, 1]$ .

**Rešitev:**  $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$

15. Izpelji formulo za obseg kroga s polmerom  $R$ .

**Rešitev:**  $2\pi R$

16. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš tako, če zavrtiš omejeni lik, ki ga omejujeta funkciji  $y = x$  in  $y = 2x - x^2$  okrog osi  $x$ .

**Rešitev:**  $\frac{\pi}{5}$

17. Izračunaj prostornino telesa, ki nastane, ko se zavrti lik, omejen s krivuljami  $x^2 - y^2 = 4$ ,  $y = -2$ ,  $y = 2$ , okrog  $y$  osi.

**Rešitev:**  $\frac{64\pi}{3}$

18. Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobiš tako, če graf funkcije  $f(x) = \sin x$  zavrtiš okrog osi  $x$  na intervalu med dvema zaporednima ničloma.

**Rešitev:**  $2\pi(\sqrt{2} + \operatorname{arsh}1)$

19. Izračunaj površino rotacijskega telesa, ki nastane, ko se zavrti lik, omejen s krivuljama  $y = \sqrt{x}$  in  $y = x$ , okrog  $x$  osi.

**Rešitev:** Površina je enaka  $\pi\sqrt{2} + \pi\frac{5\sqrt{5}-1}{6}$ . Sestavljena je iz plašča, ki je iz dveh ploskev.

20. Izpelji formuli za prostornino in površino stožca s polmerom osnovne ploskve  $r$  in višino  $v$ .

**Rešitev:**  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ ,  $P = \pi r\sqrt{r^2 + v^2} + \pi r^2$ .

21. Izpelji formuli za prostornino in površino krogle s polmerom  $R$ .

**Rešitev:**  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ ,  $P = 4\pi R^2$ .

22. Izračunaj posplošene integrale.

(a)  $\int_1^2 \frac{dx}{2-x}$

**Rešitev:** divergira

(b)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$

**Rešitev:** divergira

(c)  $\int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}} dx$

**Rešitev:** 9

(d)  $\int_3^\infty \frac{1}{x^a} dx$ ,  $a > 1$

**Rešitev:**  $\frac{1}{a-1} 3^{1-a}$

(e)  $\int_0^\infty e^{-x} dx$

**Rešitev:** 1

(f)  $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

**Rešitev:**  $\frac{\pi^2}{8}$

(g)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+2x+1}$

**Rešitev:**  $\frac{1}{2}$

(h)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+1}$

**Rešitev:** divergira

(i)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

**Rešitev:** 2

(j)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

**Rešitev:** divergira

(k)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

**Rešitev:**  $\pi$

(l)  $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$

**Rešitev:** 1

23. Za vrtenino, ki jo dobiš tako, da graf funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  zavrtiš okrog osi  $x$  na intervalu  $[1, \infty]$ , dokaži, da je njena prostornina končna, površina pa neskončna.

**Rešitev:**  $V = \pi$ ,  $P = \infty$ .

24. Skiciraj dane krivulje, ki so podane parametrično.

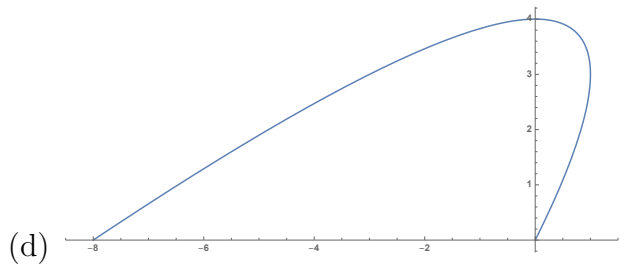
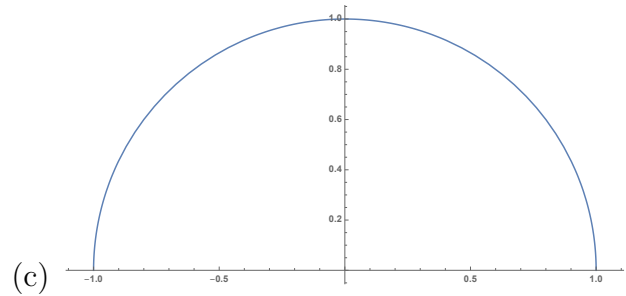
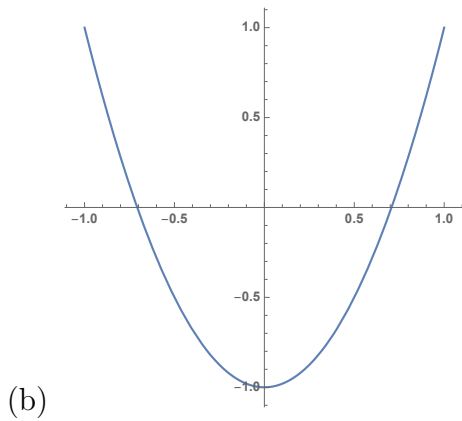
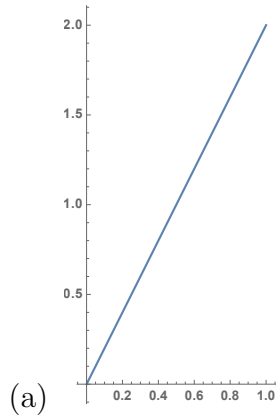
(a)  $\vec{r}(t) = (t, 2t)$ ,  $t \in [0, 1]$

(b)  $\vec{r}(t) = (\cos t, \cos 2t)$ ,  $t \in [0, \pi]$

(c)  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$

(d)  $\vec{r}(t) = (2t - t^2, 4 - t^2), t \in [-2, 2]$

**Rešitev:**



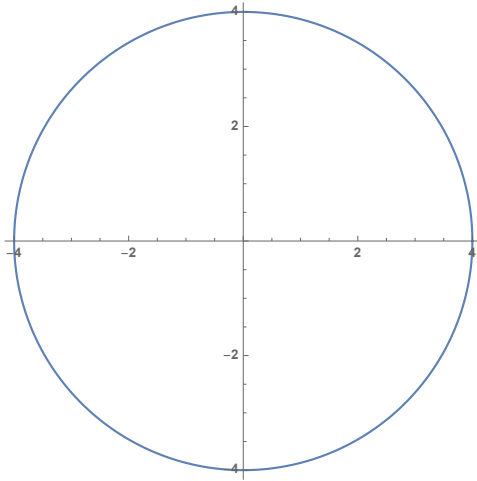
25. Skiciraj dane krivulje v polarnih koordinatah.

(a)  $r(\varphi) = 4, \varphi \in [0, 2\pi]$

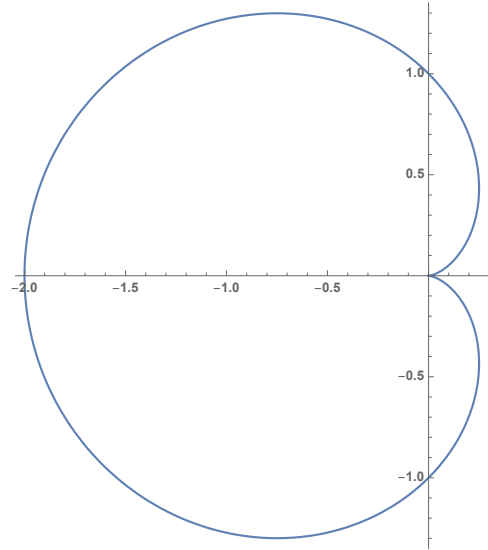
(b)  $r(\varphi) = \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

(c) (srčnica ali kardioida).  $r(\varphi) = 1 - \cos \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

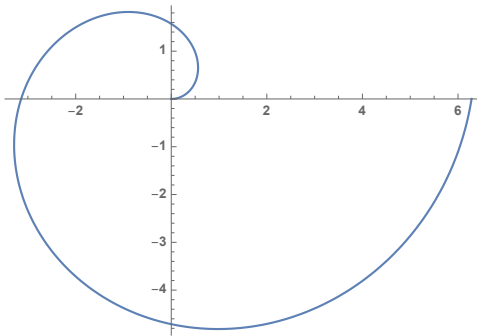
**Rešitev:**



(a)



(c)



(b)

26. (*cikloida*). Izračunaj dolžino krivulje, ki je podana parametrično

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad \text{za } t \in [0, 2\pi].$$

**Rešitev:** 8

27. Izračunaj dolžino krivulje, ki je podana parametrično

$$\vec{r}(t) = \left( t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right) \quad \text{za } t \in [0, 1].$$

**Rešitev:**  $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

28. Izračunaj ploščino zanke krivulje

$$\vec{r}(t) = (2t - t^2, 2t^2 - t^3),$$

če veš, da je točka  $(0, 0)$  samopresečišče krivulje.

**Rešitev:**  $\frac{8}{15}$

29. (*astroida*). Dana je krivulja  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ,  $a > 0$ .

- (a) Parametriziraj dano krivuljo.
- (b) Izračunaj obseg astroide.
- (c) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje.

**Rešitev:**

- (a)  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$
- (b)  $o = 6a$
- (c)  $p = \frac{3}{8}\pi a^2$

30. Izračunaj ločno dolžino krivulje  $r = e^{-3\varphi}$  me kotoma  $\varphi = 0$  in  $\varphi = \infty$ .

**Rešitev:**  $\frac{\sqrt{10}}{3}$

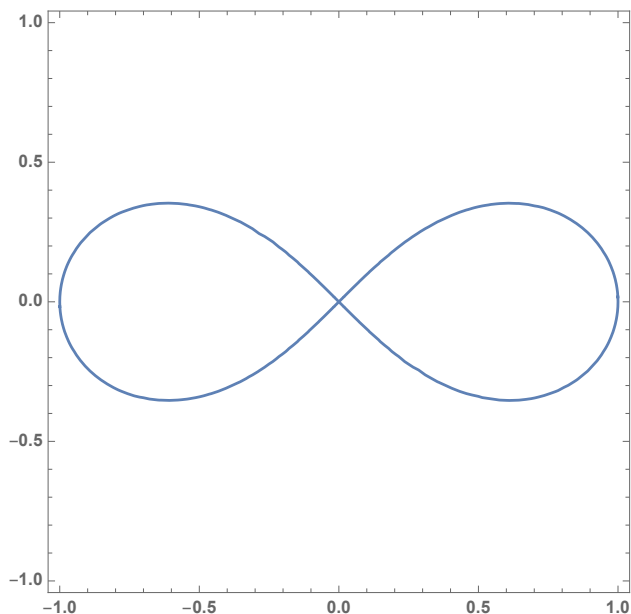
31. Izračunaj ploščino in obseg območja, ki ga omejuje srčnica

$$r(\varphi) = 1 - \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

**Rešitev:**  $P = \frac{3\pi}{2}$ ,  $o = 8$

32. (*lemniskata*). Skiciraj krivuljo  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$  in izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje. *Namig: polarne koordinate.*

**Rešitev:**  $P = 1$



33. *Integralski kriterij za vrste.* Ugotovi, ali naslednje vrste konvergirajo.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$$

**Rešitev:** divergira

$$(b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$$

**Rešitev:** konvergira

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}$$

**Rešitev:** konvergira

$$(d) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2(k)}$$

**Rešitev:** konvergira