

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dano naj bo funkcijsko zaporedje

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{\ln(n + e^{n(x^2-1)})}{n}.$$

- a) Določi funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, h kateri zaporedje (f_n) konvergira po točkah.
b) Pokaži, da zaporedje (f_n) konvergira enakomerno na intervalu $[-1, 1]$ k funkciji f .
c) Ali zaporedje odvodov (f'_n) konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$?

Rešitev:Naj bo $|x| < 1$. Potem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n + e^{n(x^2-1)})}{n} = L'Hop(po\ n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (x^2 - 1)e^{n(x^2-1)}}{n + e^{n(x^2-1)}} = 0.$$

V primeru, da je $x = \pm 1$ dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n + 1)}{n} = 0.$$

Če pa je $|x| > 1$, pa imamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n + e^{n(x^2-1)})}{n} &= L'Hop(po\ n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (x^2 - 1)e^{n(x^2-1)}}{n + e^{n(x^2-1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n(x^2-1)} + (x^2 - 1)}{ne^{-n(x^2-1)} + 1} = x^2 - 1, \end{aligned}$$

saj je $\lim_{n \rightarrow \infty} ne^{-n(x^2-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n(x^2-1)}} = L'Hop = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n(x^2-1)}(x^2-1)} = 0$.Zaporedje (f_n) torej po točkah konvergira k funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; |x| \leq 1 \\ x^2 - 1 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

Za enakomerno konvergenco na $[-1, 1]$ iščemo maksimum funkcije f_n na tem intervalu. Ker je

$$f'_n(x) = \frac{2xe^{n(x^2-1)}}{n + e^{n(x^2-1)}},$$

je stacionarna točka v $x = 0$ in kandidati za maksimum so v $x = -1, 0, 1$. Med temi je največja vrednost dosežena v $x = \pm 1$ in znaša $\frac{\ln(n+1)}{n}$. Ker je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0,$$

zaporedje (f_n) res konvergira enakomerno na $[-1, 1]$ k funkciji f .Ker f ni odvedljiva v $x = \pm 1$ (f'_n) je zaporedje povsod odvedljivih funkcij, ki po točkah konvergira, (f'_n) ne more konvergirati enakomerno na $\mathbb{R}$.

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x^2}{3+x} \right).$$

a) Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $x_0 = 0$.

b) Izračunaj odvod $f^{(10)}(0)$.

Rešitev:

Velja

$$f(x) = \ln(1+x^2) - \ln(1+\frac{x}{3}) - \ln(3).$$

Dobimo razvoj (uporabimo znane razvoje):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots - \ln(3) - \left(\frac{x}{3} - \frac{(\frac{x}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{x}{3})^3}{3} - \dots \right) = \\ &= -\ln(3) - \left(\frac{x}{3} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 x^3 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^4 \right) x^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^5 x^5 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^6 \right) x^6 + \dots \\ &\quad \dots - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{3} \right)^{2n-1} x^{2n-1} + \left((-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{3} \right)^{2n} \right) x^{2n} + \dots \end{aligned}$$

Člen s potenco 10 se glasi:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10} \frac{1}{3^{10}} \right) x^{10} = \frac{f^{(10)}(0)}{10!} x^{10} \Rightarrow f^{(10)}(0) = 9! \left(2 + \frac{1}{3^{10}} \right).$$

3. naloga (25 točk)

Določi funkcijo $y : (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tako, da bo $y(1) = 1$, in da bo ploščina trapeza, ki ga določajo točke $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(x, y(x))$ in presečišče tangente na graf funkcije skozi točko $(x, y(x))$ z y -osjo, enaka $y(x)^2$ za vse $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

Rešitev:

Imamo enačbo tangente

$$Y - y = y'(X - x).$$

Presečišče tangente z y -osjo je enako ($X = 0$)

$$Y = y - xy'.$$

Pogoj je torej

$$x \frac{2y - xy'}{2} = y^2 \Rightarrow -x^2 y' + 2xy = 2y^2$$

To je Bernoullijeva enačba, uvedemo $z = y^{-1}$ in dobimo linearno enačbo

$$x^2 z' + 2xz = 2 \Rightarrow z = \frac{C}{x^2} + \frac{2}{x}$$

torej

$$y = \frac{x^2}{2x + C} \Rightarrow (y(1) = 1) \Rightarrow (C = -1) \Rightarrow y = \frac{x^2}{2x - 1}.$$

4. naloga (25 točk)

a) Dana naj bo družina funkcij

$$y = Ce^{x^2}.$$

Poišči ortogonalno družino krivulj k dani družini.

b) Poišči vse funkcije f , da bosta družini

$$y = Cf(x) \quad \text{in} \quad xf(y) = C$$

tvorili ortogonalni družini krivulj.

Rešitev:

Velja

$$y = Ce^{x^2} \Rightarrow y' = 2xy$$

kar nam da pogoj za ortogonalno družino

$$y' = -\frac{1}{2xy} \Rightarrow xe^{y^2} = C.$$

Prva družina zadošča

$$y' = \frac{yf'(x)}{f(x)},$$

druga pa

$$y' = -\frac{f(y)}{xf'(y)}.$$

Pogoj ortogonalnosti je torej

$$\frac{xf'(y)}{f(y)} = \frac{yf'(x)}{f(x)},$$

kar preuredimo v

$$\frac{f'(y)}{yf(y)} = \frac{f'(x)}{xf(x)}.$$

Leva stran je odvisna le od y , desna od x , torej morata biti konstantni, npr. obe enaki neki konstanti A . Če označimo neodvisno spremenljivko s t , potem f zadošča enačbi

$$f'(t) = Atf(t) \Rightarrow f(t) = De^{A\frac{t^2}{2}}.$$