

LINEARNA ALGEBRA 2021/22  
VAJE: Vektorski prostori s skalarnim produktom

## Štiriindvajsete vaje

1. Pokaži, da je  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$  skalarni produkt na  $M_n(\mathbb{R})$ . Pokaži, da so matrične enote ortogonalne. Pokaži, da  $\text{tr}(AB)$  ni skalarni produkt.
2. Naj bodo  $\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$  različna realna števila. Pokaži, da je

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p(a_i)q(a_i)$$

skalarni produkt na  $\mathbb{R}_{n-1}[x]$  ne pa tudi na  $\mathbb{R}_n[x]$ .

Pokaži, da je množica  $\{l_i \mid i = 1, \dots, n\}$ , kjer je

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

ortonormirana.

3. Naj bodo  $\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$  različna kompleksa števila. Pokaži, da je

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p(a_i)\overline{q(a_i)}$$

skalarni produkt na  $\mathbb{C}_{n-1}[x]$  ne pa tudi na  $\mathbb{C}_n[x]$ .

Pokaži, da je množica  $\{l_i \mid i = 1, \dots, n\}$ , kjer je

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

ortonormirana.

4. Pokaži  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$  je skalarni produkt na prostoru zveznih funkcij na intervalu  $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . Pokaži, da so  $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx \mid n \in \mathbb{N}\}$  ortogonalni.
5. Pokaži, da je vse zvezne funkcije  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

6. Poišči kakšno ortogonalno (ortonormirano bazo) prostora

$$V = \text{Lin}\{(1, 1, 0, 0)^T, (0, 1, 1, 0)^T, (-1, 1, 1, 1)^T\}$$

glede na standardni skalarni produkt.

7. Poišči ortogonalno bazo prostora  $\mathbb{R}_3[x]$ , glede na skalarni produkt  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ .
8. Naj bo  $\{v_1, \dots, v_k\}$  ortonormirana množica (glede na nek skalarni produkt) v vektorskem prostoru  $V$ . Za poljuben  $u \in V$  poišči  $v \in \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}$ , ki mu je najbližje.

## Petindvajsete vaje

1. Naj bodo  $V_i$  podprostori vektorskega prostora s skalarnim produktom  $W$ . Pokaži,
  - a.) Če je  $S$  podmnožica  $W$ , potem je  $(S^\perp)^\perp = \text{lin } S$ .
  - b.)  $V_1 \subset V_2 \implies V_2^\perp \subset V_1^\perp$
  - c.)  $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$
  - d.)  $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$
2. Poišči ortogonalni komplement

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

v  $\mathbb{R}^5$  glede na standardni skalarni produkt.

3. V  $\mathbb{R}_2[x]$  poišči vektorja, ki po Rieszovem izreku pripadata linearnemu funkcionalu  $Lp = p(0)$ , glede na skalarna produkta

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt \quad \text{in} \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

## Šestindvajsete vaje

1. Naj bo  $\mathbb{R}^3$  opremljen z običajnim skalarnim produktom. Izračunaj adjungirano preslikavo preslikave  $x \mapsto a \times x$ .
2. Naj bo  $a \in U$  in  $b \in V$ , kjer sta  $U$  in  $V$  vektorska prostora s skalarnim produktom. Izračunaj adjungirano preslikavo linearne preslikave  $U \rightarrow V$  določene z  $x \mapsto \langle x, a \rangle b$ . Pokaži, da je vsaka preslikava  $A: U \rightarrow V$  z  $\text{rang } A \leq 1$  oblike  $Ax = \langle x, a \rangle b$  za neka  $a \in U$  in  $b \in V$ .
3. Izračunaj adjungirano preslikavo odvajanju v  $\mathbb{R}_2[x]$  glede na skalarni produkt  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ .
4. Pokaži, da je  $\ker(A^*A + B^*B) = \ker(A) \cap \ker(B)$  ( $\ker(\sum_{j=1}^n A_j^*A_j) = \bigcap_{j=1}^n \ker A_j$ )
5. Naj bo  $A: V \rightarrow V$  in  $W$  invarianten za  $A$ . Pokaži, da je  $W^\perp$  invarianten za  $A^*$ .

## Sedemindvajsete vaje

1. Naj bo  $A \in M_n(\mathbb{R})$  in naj velja  $A^T = -A$ . Pokaži, da ima  $A$  samo imaginarne lastne vrednosti. Pokaži, da je  $I - A$  obrnljiva matrika.

2. Naj bo  $V$  vektorski prostor s skalarnim produktom in  $W$  podprostor z ortonormirano bazo  $\{b_1, \dots, b_n\}$ . Naj bo preslikave  $P: V \rightarrow V$  definirana z

$$Px = \sum_{j=1}^n \langle x, b_j \rangle b_j$$

Pokaži, da je  $P^2 = P$  in  $P^* = P$ .

3. Naj bo  $V$  vektorski prostor nad  $\mathbb{C}$ . Pokaži, da je  $A = 0$  natanko tedaj, ko je  $\langle Ax, x \rangle = 0$  za vse  $x \in V$ . Pokaži, da trditev ne velja za vektorske prostore nad  $\mathbb{R}$ .
4. Poišči diagonalizacijo matrike  $A$  z ortogonalno prehodno matriko

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Za normalno matriko  $A$  pokaži:

- a)  $\ker A = \ker A^*$
- b)  $\operatorname{im} A = \operatorname{im} A^*$
- c) Če je  $\ker A \subseteq \operatorname{im} A$ , potem je  $A$  obrnljiva.
- d) Če je  $A^2 = 0$ , potem je  $A = 0$ .

6. Naj bo  $A = (a_{ij})$  hermitska matrika in  $\lambda$  njena največja lastna vrednost. Pokaži, da je  $\lambda \geq a_{ii}$  za vsak  $i$ .

## Osemindvajsete vaje

1. Določi vse  $a, b$ , da bo matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix}$$

normalna.

2. Naj bo realna matrika

$$\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$$

normalna/ortogonalna. Pokaži, da je  $B + iC$  normalna/unitarna.

3. Naj bo  $P$  pozitivno semidefinitna. Pokaži, da je  $SPS^*$  pozitivno semidefinitna.
4. Naj bosta  $P, Q$  sebi adjungirana idempotenta. Pokaži, da je  $Q - P$  sebi adjungiran idempotent natanko tedaj, ko je  $Q - P$  pozitivno semidefiniten.
5. Naj bo  $V$  vektorski prostor s skalarnim produktom in  $v_1, \dots, v_n \in V$  vektorji. Naj bo  $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$  matrika, kjer je  $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ . Pokaži, da je  $G$  pozitivno semidefinitna. Pokaži, da je  $G$  pozitivno definitna, če so vektorji  $v_1, \dots, v_n$  linearno neodvisni.

## Devetindvajsete vaje

1. Naj bo  $U$  normalna matrika. Pokaži, da je  $U$  unitarna natanko tedaj, ko je  $U^2$  unitarna. Poišči primer matrike za katero je  $A^2$  unitarna  $A$  pa ni.
2. Naj bo  $A = (a_{ij})$  pozitivno semidefinitna matrika. Pokaži, da je

$$a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}^2.$$

Kaj lahko poveš o matriki, če je  $a_{ii} = 0$ .

3. Klasificiraj vse skalarne produkte na  $\mathbb{C}^n$ .
4. Izračunaj singularni razcep in psevdoinverz matrik

$$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Pokaži:

5.1.  $A^{++} = A$

5.2. Če je  $A$  obrnljiva, je  $A^+ = A^{-1}$ .

5.3.  $(A^T)^+ = A^{+T}$

5.4.  $(\alpha A)^+ = \frac{1}{\alpha} A^+$