

Taylorjeva vrsta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty, \quad I = (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty, \quad I = (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty, \quad I = (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad R = 1, \quad I = [-1, 1)$$

$$r \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n, \quad R = 1 : \quad I = [-1, 1] \text{ če } r > 0,$$

$$I = (-1, 1] \text{ če } -1 < r < 0, \quad I = (-1, 1) \text{ če } r \leq -1.$$

1. Funkcijo $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke

(a) $x = 0$

(b) $x = 1$

(c) $x = 3$

Rešitev:

(a) $x^3 - x^2 + x - 1$

(b) $(x-1)^3 + 2(x-1)^2 + 2(x-1)$

(c) $20 + 22(x-3) + 8(x-3)^2 + (x-3)^3$

2. Naslednje funkcije razvij v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča.

(a) $f(x) = e^{2x}$

(b) $f(x) = e^{x^2}$

(c) $f(x) = a^x, (a > 0)$

(d) $f(x) = xe^{2x-1}$

Rešitev:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$

3. Funkcijo $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog

(a) $x = 0$

(b) $x = 1$

(c) Izračunaj $f^{(2022)}(0)$.

Rešitev:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n$

(c) $\frac{2022! \cdot 2^{2022}}{3^{2023}}$

4. Funkcijo $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+2x)}$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog izhodišča. Izračunaj $f^{(2022)}(0)$.

Rešitev: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n \right) x^n$, $f^{(2022)}(0) = \frac{1}{3} \frac{1+2^{2023}}{2022!}$.

5. Naslednje funkcije razvij v Taylorjevo vrsto okrog izhodišča.

(a) $f(x) = \cos(x + \pi)$,

(b) $g(x) = \sin^2 x$,

(c) $h(x) = \ln(1 - 2x^3)$,

(d) $k(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Rešitev:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n}}{2n!}$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^n x^{3n}}{n}$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

6. Naslednji funkciji razvij v Taylorjevo vrsto okrog $x = a$.

$$(a) f(x) = \frac{1}{x}, a = 1,$$

$$(b) g(x) = e^x, a = 2.$$

Rešitev:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 (x-2)^n}{n!}$$

7. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x \sin(x^2)}.$$

Rešitev: 1

8. Pokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(e^{-x\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-n} \right) = \frac{x^2}{2}.$$

9. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{3x}{2} - \frac{x^3}{1 + \frac{1}{x}} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

$$\textbf{Rešitev: } -\frac{11}{6}$$

10. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1+\frac{4}{3}x^2}}{2-x^2-2\cos x}.$$

$$\textbf{Rešitev: } -\frac{2}{3}$$

11. Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke $x = a$ ter določi njen konvergenčni polmer in konvergenčno območje

$$(a) \frac{x}{1-4x}, a = 0$$

- (b) $\frac{x^4}{9+x^2}, a = 0$
- (c) $\frac{1}{(1-x)^2}, a = 0$
- (d) $\frac{1}{x^2+6x+10}, a = -3$
- (e) $\sqrt{4+x}, a = 0$
- (f) $\ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}, a = 0$

Rešitev:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{n+1}, R = \frac{1}{4}, I = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}} x^{2n+4}, R = 3, I = (-3, 3)$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, R = 1, I = (-1, 1)$
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+3)^{2n}, R = 1, I = (-4, 2)$
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n, R = 4, I = [-4, 4]$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-2)^n}{3n} x^n, R = \frac{1}{2}, I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

12. (a) Določi konvergenčno območje potenčne vrste $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.
- (b) Seštej vrsto.
- (c) Izračunaj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.

Rešitev:

- (a) $R = 1, I = (-1, 1)$
- (b) $\frac{1}{(x-1)^2}$
- (c) 4

13. (a) Določi konvergenčno območje potenčne vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(x-1)^n}{n}$.
- (b) Seštej vrsto.
- (c) Izračunaj vsoto pri $x = \frac{2}{3}$.

Rešitev:

- (a) $R = \frac{1}{3}, I = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(b) $-\frac{1}{3} \ln(4 - 3x)$

(c) $-\frac{1}{3} \ln 2$

14. Določi konvergenčni radij in konvergenčno območje potenčne vrste.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n.$$

Seštej vrsto.

Rešitev: $R = 1, I = [-1, 1], x + \ln(1 - x) - x \ln(1 - x)$

15. Funkcijo $f(x) = \arctan x$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog izhodišča.

Rešitev: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

16. Funkcijo $f(x) = \arcsin x$ razvij v Taylorjevo vrsto okrog izhodišča.

Rešitev: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+1}}{(n!)^2 2^{2n} (2n+1)}$